KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

TOÁN HỌC & Sinh viên

TẠP CHÍ DÀNH CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

11

THÁNG 3
2024

Софья Ковалевская
(15/01/1850 - 10/02/1891)

Софья Ковалевская

Nguồn: Internet

THÁNG THANH NIÊN NĂM 2024

TUỔI TRẺ KHOA TOÁN - HPU2 XUNG KÍCH, TÌNH NGUYỆN VÌ CUỘC SỐNG CỘNG ĐỒNG

TOÁN HỌC & Sinh viên

TỔNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN VĂN BẰNG

PHÓ TỔNG BIÊN TẬP

PGS.TS. NGUYỄN VĂN TUYÊN

TS. NGUYỄN THỊ KIỀU NGA

BAN BIÊN TẬP

Trưởng ban

ThS. HÀ TUẤN DŨNG

Phó Trưởng ban

ThS. NGUYỄN QUANG CHUYÊN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

ThS. Nguyễn Thị An

ThS. Trần Thị Vân Anh

TS. Nguyễn Trung Dũng

TS. Nguyễn Phương Đông

TS. Đào Thị Hoa

TS. Đỗ Văn Kiên

ThS. Phan Văn Lộc

CN. Nguyễn Tiến Mạnh

ThS. Phạm Thế Quân

ThS. Phạm Thanh Tâm

TS. Trần Văn Tuấn

TRONG SỐ NÀY

LỊCH SỬ TOÁN HỌC Tr 1

Lê Quang Ánh - *Sofia Kovalevskaya: Nữ giáo sư đầu tiên trong lịch sử châu Âu.....Trang 1*

DÀNH CHO TOÁN SƠ CẤP Tr 8

Dư Đại Thành - *Điểm Brocard trong tam giác và một số vấn đề liên quan.....Trang 8*

Vũ Quang Huy, Nguyễn Thị Thu Hà - *A convergent subsequence of* {sin *n*}.....*Trang 25*

Nguyễn Trịnh Tam - *Định lý Stewart.....Trang 32*

CHUYÊN ĐỀ TOÁN CAO CẤP Tr 45

Nguyễn Thị Hồng Thái - *Một số phương pháp tính định thức.....Trang 45*

Đỗ Thu Hiền, Phạm Thị Mai Hương, Hoàng Thị Hải Yến - *Tính ổn định của phương trình vi phân tựa tuyến tính.....Trang 63*

Nguyễn Hương Giang, Nguyễn Thị Thảo - *Bội giao của hai đường cong.....Trang 77*

Nguyễn Hoàng Hà, Vũ Thị Minh Trang, Đỗ Duy An - *Các phương pháp tính tích phân đường của trường vectơ.....Trang 83*

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN Tr 101

Bùi Thị Huyền Trang, Phạm Thu Thảo, Nguyễn Như Quỳnh, Nguyễn Bá Khang - *Kỹ thuật khởi tạo câu hỏi: Mở rộng khả năng tư duy và Khám phá trong quá trình học tập.....Trang 101*

NEWS Bìa 3, 4

ĐỊA CHỈ NHẬN BÀI

KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

Phòng 5.01 - Nhà A1, số 32, đường Nguyễn Văn Linh, phường Xuân Hòa, thành phố Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc.

Điện thoại: 0965.174.594 - Email: hatuandung@hpu2.edu.vn - Website: https://maths.hpu2.edu.vn/

TẠP CHÍ LƯU HÀNH NỘI BỘ KHOA TOÁN - TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

TOÁN HỌC LỊCH SỬ

SOFIA KOVALEVSKAYA: NỮ GIÁO SƯ ĐẦU TIÊN TRONG LỊCH SỬ CHÂU ÂU

Lê Quang Ánh
Theo Tạp chí Tia sáng

Vượt qua những rào cản của thời đại luôn cản trở nữ giới tham gia làm khoa học, Sofia Kovalevskayav đã nỗ lực trở thành tiến sĩ và giáo sư thực thụ đầu tiên trong lịch sử châu Âu. Tên tuổi của bà cũng được nhắc đến như là một trong những phụ nữ đi tiên phong trong phong trào đòi nữ quyền ở châu Âu.

1. BỘC LỘ TIỀM NĂNG TOÁN HỌC TỪ SỚM

Sofia sinh ngày 15 tháng 1 năm 1850 tại Moscow, là con thứ hai trong gia đình thượng lưu thuộc dòng họ Krukovsky. Từ nhỏ Sofia được nuôi dưỡng và giáo dục đầy đủ ở lãnh địa của dòng họ Krukovsky, một địa phương tên là Palibino gần biên giới với Lithuania. Vú nuôi của Sofia là một người Anh có học thức, biết nói tiếng Nga, tiếng Pháp và tiếng Đức, cho nên ngoài tiếng Nga, Sofia học được nhiều thứ tiếng khác ngay nhỏ. Ngoài ra bà còn dạy cho Sofia nhiều kiến thức phổ thông khác, ngoại trừ Toán Cao cấp.

Một lần, người vú nuôi chưa tìm đủ giấy dán tường nên lấy tập bài giảng Calculus cũ (thời cha của Sofia đi học)[1] đem dán tạm. Rồi bà vú quên thay giấy dán tường mới, nhưng cô bé Sofia khi ấy mới 8,9 tuổi "*... hễ lúc nào rảnh lại nhìn chằm chặp vào những cái hình và công thức 'kỳ lạ' ấy*," chị của Sofia kể lại. Có phải đó là cái "điềm" báo trước cô bé sau này mê Toán không?

Nhà Vật lý Nikolai Nikanorovich Tyrtov, là chú họ của Sofia đã phát hiện ra khả năng học và hiểu nhanh môn học một cách khác thường khi thấy cô bé đọc và hiểu sách Vật lý của ông. Ông còn rất ấn tượng khi thấy cô "chế biến" một số công thức Lượng giác trong sách của ông nữa. Ông đặt tên cho Sofia là *Pascal mới* (New Pascal), và khuyên cha mẹ Sofia tìm giáo viên dạy thêm cho Sofia về môn Toán.

Mùa Đông năm 1866 – 1867, gia đình về nghỉ ở Saint-Petersburg. Dịp này cha mẹ Sofia mướn được một thầy giáo chuyên dạy Toán tại nhà tên là Alexander N. Strannolyubsky, ông này đang dạy Toán tại Học viện Hải quân Saint-Petersburg. Thầy giáo dạy cho Sofia môn Toán Cao cấp, và ông nhận ra ngay khả năng đặc biệt của cô học trò của mình, làm như cô đã biết trước môn Toán này từ lâu rồi. Cũng mùa Đông ấy, Sofia làm quen với chủ nghĩa *Hư Vô (Nihilism)* qua tài liệu sách báo của một người bạn của Anna (còn gọi là Anya), chị của Sofia. Tư tưởng này đang thịnh hành trong giới trẻ thành thị Nga.

Hết năm 1867, Sofia 17 tuổi, học hết trung học, mặc dù học giỏi nhưng Sofia không thể vào đại học. Thời ấy, ở nước Nga cũng như hầu hết các nước khác ở châu Âu, phụ nữ không

được phép ghi tên vào trường đại học. Khi muốn đi ra nước ngoài (du lịch hoặc học tập), phụ nữ Nga không được phép đi một mình, mà phải đi cùng chồng hoặc có giấy cho phép của cha hoặc chồng. Năm 1868, Sofia 18 tuổi – trước ước muốn được ra nước ngoài tìm cơ hội học tập, gia đình phải sắp xếp một cuộc hôn nhân "giả" cho Sofia: Sofia kết hôn với Vladimir Kovalevsky[2], một sinh viên chuyên ngành Sinh Vật học. Kovalevsky nghĩ rằng mới đầu có thể cuộc hôn nhân là "giả", nhưng do yêu Sofia, Kovalevsky hy vọng cuộc hôn nhân sẽ trở thành thật. Sau khi lấy nhau, hai người rời Saint-Petersburg và qua Đức.

Sofia Kovalevskaya (1850 – 1891), hình chụp năm 1880 (Sofia 30 tuổi). Tên đầy đủ thời còn con gái của bà: Sofia Vasilyevna Korvin-Krukovskaya (họ của cha bà là Krukovsky). Tên đầy đủ khi lập gia đình: Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (họ của chồng bà là Kovalevsky), thường người ta gọi bà là Sofia Kovalevskaya, còn đôi khi trong bài viết bà để tên Sophie Kovalevsky hoặc Sonya Kovalevskaya. (nguồn: Wikipedia).

2. NỮ TIẾN SĨ ĐẦU TIÊN Ở CHÂU ÂU

Tháng 4 năm 1869, họ dừng lại tại Heidelburg, một thành phố ở miền Tây-Nam nước Đức để Sofia xin vào Đại học Heidelburg. Cũng như ở Nga, Sofia bị từ chối, tuy nhiên ở đây người ta cho Sofia ghi tên với tư cách sinh viên dự thính. Cô ghi tên học Vật lý và Toán học với nhiều giáo sư danh tiếng như Hermann von Helmholtz (1821 – 1894), Gustav Kirchhoff (1824 – 1887) và Robert Bunsen (1811 – 1899). Trong thời gian ấy, Vladimir lên Đại học Jena ở miền Đông-Bắc nước Đức để theo học lấy bằng Tiến sĩ Cổ Sinh Vật học.

Tháng 10 năm ấy, năm 1869, sau khi thủ tục ghi tên vào các lớp dự thính xong, Sofia theo Vladimir qua London để anh tiếp xúc, và học hỏi chuyên môn với các giáo sư hàng đầu cùng ngành ở Anh như Thomas Huxley (1825 – 1895) và nhất là Charles Darwin (1809 – 1882). Thời gian ở London, Sofia tham dự một số salon bàn luận về các vấn đề văn chương, nghệ thuật, trong đó có salon của nhà văn, nhà thơ nữ nổi tiếng George Eliot (1819 – 1880). Tại đây, Sofia – năm ấy 19 tuổi – đăng đàn tranh luận (bằng tiếng Anh) với nhà Triết học, nhà Văn, nhà Sinh vật học Herbert Spencer (1820 – 1903) về đề tài "*Woman's capacity for*

abstract thought" (*Khả năng của phụ nữ trong tư duy trừu tượng*). Trở về lại Heidelburg, nàng kịp hoàn tất các lớp học (dự thính) tại đây.

Tháng 10 năm 1870, Sofia đến Berlin với mục đích tìm học Toán với giáo sư Karl Weierstrass (1815 – 1897), nhà Toán học Đức, được xem như "cha đẻ" của Giải tích hiện đại. Nhưng Đại học Berlin còn khắt khe hơn ở Đại học Heidelburg nữa: thậm chí người ta không cho Sofia ghi tên dự thính. Sofia xin được học tư với giáo sư Weierstrass. Có thể do sự quyết tâm và khả năng khác thường của nàng mà giáo sư Weierstrass nhận lời và dạy riêng cho nàng suốt trong gần 4 năm liền. (Xin được nói thêm một chút ở đây. Weierstrass lớn hơn Sofia 35 tuổi và có ba cô con gái cỡ tuổi với Sofia. Ông coi Sofia như con gái mình, thỉnh thoảng Sofia ở lại nhà Weierstrass, học với thầy và chơi với các cô con gái. Do đó có một số dư luận không hay về thành quả của Sofia, nhất là có người cho rằng có "bàn tay" của Weierstrass trong ba bài nghiên cứu tạo nên Luận án Tiến sĩ của Sofia. Ngay cả nhà viết sử nổi tiếng của thế kỷ 20 là E.T. Bell cũng có một vài nhận xét không chính xác về chuyện này3. Nhưng nhờ tài năng thật sự của Sofia mà những tiếng đồn không hay dần dần không còn nữa).

Năm 1874, Sofia Kovalevskaya trình luận án của mình đến trường Đại học Göttingen, dưới sự đỡ đầu của Giáo sư Weierstrass, để xin cấp bằng Tiến sĩ Toán. Luận án gồm 3 đề tài liên quan đến:

1. Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng.
2. Kỹ thuật giản lược một loại tích phân Abel về tích phân elliptic.
3. Bổ sung những nghiên cứu của Laplace về vành đai của sao Thổ (Saturn's ring).

Trường Đại học Göttingen đã chấp thuận và cấp cho Sofia Kovalevskaya văn bằng Tiến sĩ với hạng tối danh dự (summa cum laude) vì luận án xuất sắc, mặc dù không chính thức ghi danh học ở đó (*In absentia*).

Sofia Kovalevskaya trở thành người phụ nữ đầu tiên được chính thức cấp bằng Tiến sĩ ở châu Âu.

3. CUỘC SỐNG CHẬT VẬT

Sau khi tốt nghiệp xong, Sofia và Vladimir trở về Nga. Cả hai đều không tìm được việc làm thích hợp. Về phần Sofia, xã hội Nga (thật ra là khắp châu Âu) thời ấy không cho phép phụ nữ chính thức có mặt trong các định chế Hàn lâm, còn Vladimir là do bị nghi ngờ có tư tưởng cấp tiến[4] chống lại xã hội phong kiến Nga Hoàng.

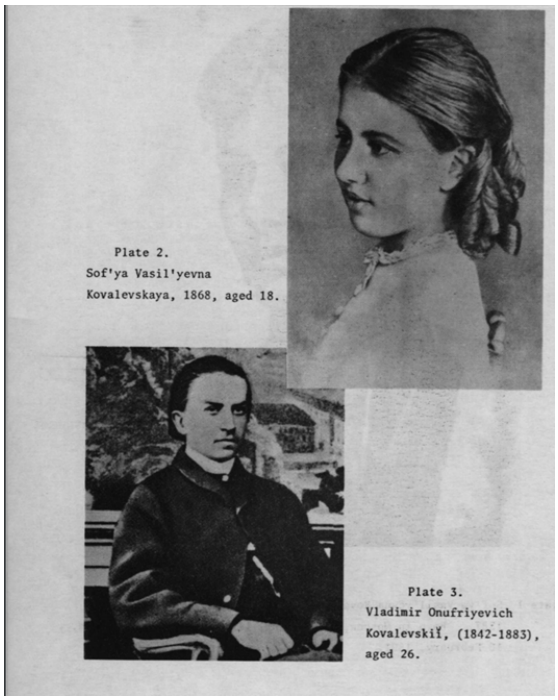
Trong thời gian này, hai người chính thức sống chung với nhau. Họ làm cả những việc không thuộc chuyên môn của mình để kiếm sống. Sofia thì viết tin tức cho tờ New Time ở Saint Petersburg, còn Vladimir thì làm việc tạm thời cho một công ty bất động sản.

Năm 1878, Sofia sinh được một bé gái cũng đặt tên là Sofia (nhưng thường được gọi là Fufa), cuộc sống của hai vợ chồng càng khó khăn hơn. Sau hai năm ở nhà nuôi con, Sofia

gửi Fufa cho bà con và bạn gái để trở lại công việc khoa học. Vladimir rất bất mãn về quyết định này của Sofia.

Năm 1880, với sự giới thiệu của nhà Toán học P.L. Chebyshev (1821 -1894), Sofia Kovalevskaya trở thành hội viên Hội Toán học Moscow.

Trong những năm 1881 – 1883, bà liên tục di chuyển giữa Berlin và Paris để nghiên cứu vấn đề Toán học của hiện tượng khúc xạ ánh sáng qua môi trường tinh thể. Trong khi đó công việc làm ăn của Vladimir không có gì suôn sẻ, ông suy sụp tinh thần, bắt đầu có dấu hiệu của bệnh tâm thần, cuối cùng đi đến tự kết liễu đời mình vào tháng 4 năm 1883. Luôn suy nghĩ về trách nhiệm trong cái chết của chồng, Sofia cũng chán nản rời bỏ những hoạt động khoa học và xã hội.



Cặp vợ chồng "giả" khi mới cưới: Sofia 18 tuổi và Vladimir 26 tuổi.

Nhưng trong thời điểm bi đát nhất của cuộc sống, một phép lạ đã đến với bà. Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927), nhà Toán học nổi tiếng Thụy Điển được vua Thụy Điển tin cậy, người rất ngưỡng mộ Weierstrass, đã đưa bà về Thụy Điển và tìm cho bà một công việc phù hợp – đó là giảng viên không lương (*Privatdozentin*)[5] tại trường Đại học Stockholm. Một năm sau (1884), do tài năng được thể hiện một cách rõ ràng, bà được ký hợp đồng 5 năm vào ngạch phụ tá giáo sư, và năm 1889 bà được phong giáo sư thực thụ.

Như vậy Sofia Kovalevskaya là *người phụ nữ đầu tiên* trở thành giáo sư chính thức trong Lịch sử châu Âu. Kể từ đó bà có một địa vị được tôn kính trong giới thượng lưu trí thức Thụy Điển. Cũng cần nói thêm rằng, vào năm 1882, chính Mittag-Leffler là người sáng lập ra tờ báo Toán học *Acta Mathematica*, tờ báo nổi tiếng cho tới ngày hôm nay. Hai năm sau, năm 1884, Sofia Kovalevskaya trở thành viên Hội đồng Biên tập (Editorial Board) của tờ

báo này.

Những hoạt động Khoa học, Toán học, và Văn học của bà hầu hết được diễn ra trong những năm 1884 – 1890 khi vị trí của bà trong xã hội, trong thế giới Khoa học được công nhận. Một số sự kiện và công trình nghiên cứu tiêu biểu của bà trong thời gian này – theo tài liệu của Dr. Elena N. Polyakhova, khoa Toán Đại học Saint-Petersburg, Nga gồm có:

- Tháng 2 năm 1884 được bổ nhiệm vào Hội đồng Biên tập của tờ báo Toán học Acta Mathematica. Công bố đề tài thứ hai về Tích phân trong luận án Tiến sĩ trên tờ báo Acta Mathematica số tháng 4 năm 1884 bằng tiếng Đức *Ueber die Reduktion einer bestimmten Klasse Abel'schen Integrale 3-en Ranges auf elliptische Integrale*. Cũng trong năm 1884, bà gửi đăng trong báo cáo hằng tuần của Viện Hàn lâm Khoa học Paris bài nghiên cứu về Toán-Vật lý: *Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé* (*Sự truyền của ánh sáng trong môi trường tinh thể*)[6].

- Năm 1885 công bố đề tài thứ ba về vành đai của sao Thổ (Thiên văn học) của luận án Tiến sĩ bằng tiếng Đức *Zusaetze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung ueber die Gestalt der Saturnringe* trên tờ báo Thiên văn *Astonomische Nachrichten*, Kiel.

- Năm 1886 công bố bài báo Remembrances of George Eliot (Hồi ức về thi sĩ G. Eliot) trên tờ báo Russia Though số tháng 6, 1886.

- Năm 1887, cùng với nhà văn, nhà biên kịch Anna Charlotte Leffler-Edgren (em gái của nhà Toán học Mittag-Leffler) hoàn thành vở kịch *Fight for Happiness* (Đấu tranh cho Hạnh phúc).

- Năm 1888 nghiên cứu về sự quay của một vật thể rắn (Cơ học cổ điển). Đề tài này được giải thưởng Bordin của Hàn lâm Viện Khoa học Paris (Prix Bordin de l'Académie des Sciences de Paris) với tựa đề *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.*

- Năm 1889, cho công bố bài nghiên cứu nói trên trong số báo Acta Mathematica số tháng 12, bằng tiếng Anh dưới tựa đề *Problem of rigid body rotation around a fixed point.* Công bố một bài tiểu luận văn học về nhà văn M.E. Saltykov-Shchedrin (1826 – 1889) trên một tờ báo Pháp. Với sự giới thiệu của nhà Toán học Chebyshev, Sofia Kovalevskaya được bầu làm thành viên thông tấn (Correspondent member) của Hàn lâm Viện Khoa học Saint-Petersburg.

- Năm 1890 khai triển tiếp về đề tài về sự quay của một vật thể rắn (Cơ học cổ điển), bà cho công bố bài nghiên cứu *Sur la propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (*Về một tính chất của hệ phương trình vi phân xác định phép quay của một vật thể rắn chung quanh một điểm cố định*) trên tờ Acta Mathematica 1890. Với nghiên cứu này bà được giải thưởng của Hàn lâm Viện Khoa học Thụy Điển.

Cũng trong năm 1890 bà cho xuất bản tập hồi ký *A Russian Childhood* (*Thời ấu thơ của một đứa trẻ Nga*) và vở kịch Nihilist Girl (Một phụ nữ theo thuyết hư vô). Bản dịch tiếng Nga *Nihiliska* bị nhà nước Xô viết cấm xuất bản ở Nga cho đến năm 1928.

Sophia Kovalevskaya bị bệnh sưng phổi và mất vào ngày 10 tháng 2 năm 1891 tại Stockholm, Thụy Điển, sau khi trở về từ một chuyến đi nghỉ ở Nice, Pháp. Khi ấy bà mới có 41 tuổi. Con gái duy nhất của bà, lúc ấy 12 tuổi, được nhà Thiên văn Gylden đem về nuôi sau này trở thành một Bác sĩ Y khoa, mất năm 1953, không lập gia đình.

4. ÂM HƯỞNG MANG TÊN KOVALEVSKAYA

Sofia Kovalevskaya không phải là nhà Toán học hàng đầu thế giới, nhưng bà là một trong ba nhà nữ Toán học tài năng nhất gần thời đại chúng ta (cuối thế kỷ 19 – đầu thế kỷ 20). Tên của bà gắn liền với một định lý quan trọng của Giải tích học: Định lý Cauchy-Kovalevskaya. Ngoài ra tên tuổi của bà cũng được nhắc đến như là một trong những phụ nữ đi tiên phong trong phong trào đòi quyền phụ nữ ở châu Âu. Tài năng và cuộc đời của bà là nguồn cảm hứng cho một số cuốn tiểu thuyết tiểu sử và phim ảnh. Xin được liệt kê một số sự kiện và sách vở nói về bà hoặc có mang tên bà:

- The Sonya Kovalevskaya Lecture (Bài giảng Sonya Kovalevskaya): Bài giảng xuất sắc hằng năm do hội AWM bảo trợ, nhằm mục đích đề cao sự đóng góp của phụ nữ trong lãnh vực Toán và Toán ứng dụng.
- Kovalevskaya Fund (Quỹ Kovalevskaya): Thành lập vào năm 1985, nhằm hỗ trợ phụ nữ ở các nước đang phát triển trong nghiên cứu sáng tạo Khoa học.
- Quỹ Alexander Von Humboldt ở Đức mỗi năm hai lần trao tặng giải thưởng Sofia Kovalevskaya cho những nữ khoa học gia trẻ.
- Một miệng núi lửa trên Mặt trăng mang tên Kovalevskaya.
- Ở Saint-Pertersburg và Moscow đều có con đường mang tên Sofia Kovalevskaya.
- Sách Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevskaya (Chim sẻ bé nhỏ: Chân dung của S.K) của Don.H. Kennedy, Ohio University Press. 1983.
- Sách Beyond the Limit: The Dream of Sofia Kovalevskaya (Bên kia giới hạn: Giấc mơ của S.K) của Joan Spicci, Tom Doherty Associates. 2002.
- Sách Too Much Happiness (Quá nhiều hạnh phúc). Alice Munro. McClelland and Stewart. Toronto. 2009.
- Phim Sofia Kovalevskaya, đạo diễn Losef Shapiro. Sản xuất năm 1956.
- Phim TV Sofia Kovalevskaya, đạo diễn người Azerbaijan Ayan Shakhmaliyeva. Sản xuất năm 1985.

Chú thích:

[1] Đó là giáo trình in thạch bản của nhà Toán học Mikhail Ostrogradsky (1801 – 1862). Nguồn: *Best of Russia – Famous Russians* (`https://web.archive.org`).

[2] Sau này, chính Kovalevsky là người đầu tiên dịch công trình của Charles Darwin sang tiếng Nga.

[3] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, chap 10.

[4] Vladimir Kovalevsky từng tham gia Công xã Paris cùng với vợ chồng cô chị Anna của Sofia. Hai vợ chồng cô chị sau đó bị bắt tại Pháp, rồi họ vượt ngục, trốn thoát được qua Anh.

[5] Ở Đức cũng như một số nước khác ở châu Âu thời ấy, khi một tân Tiến sĩ được tuyển dụng vào đại học, người này sẽ bắt đầu bằng chức vụ *Privatdozent* (nam) hay *Privatdozentin* (nữ), giảng viên không lương nhưng có thể thu của sinh viên một ít học phí để đủ sống.

[6] Ngay sau khi bài nghiên cứu được công bố, Vito Volterra (1860 – 1940), nhà Vật lý người Ý, khi ấy mới 24 tuổi, đã tìm thấy một vài sai sót. Sau này Kovalevskaya không còn muốn đề cập tới nghiên cứu này nữa.

[7] Hai người kia là Sphie Germain và Emmy Noether.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Aubin, *Remembering Kovalevskaya*, Springer Verlag, 2011.

[2] E.T. Bell, *Men of Mathematic*, Simon and Schuster, New York, 1965.

[3] R. Cooke, *The Mathematics of Sofia Kovalevskaya*, Springer Verlag, New York, 1984.

[4] D. H. Kennedy, *Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevskaya*, Ohio University Press. 1983.

[5] A. Munro, *Too Much Happiness*, McClelland and Stewart, Toronto, 2009.

[6] J. Spicci, *Beyond the Limit: The Dream of Sofia Kovalevskaya*, Tom Doherty Associates. 2002.

[7] And Reviewed of this book by Ann Hibner Koblitz at `https://www.ams.org/notices/200401/rev-annkoblitz.pdf`.

[8] `http://www.storyofmathematics.com/19th.html`.

[9] `https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/kova.htm`.

ĐIỂM BROCARD TRONG TAM GIÁC VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Dư Đại Thành
Trường THPT Vân Tảo, Thường Tín, Hà Nội

1. MỞ ĐẦU

Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard (12/05/1845-16/01/1922), là một nhà Toán học và Khí tượng học xuất sắc của người Pháp trong thế kỉ 19. Thành tự lớn nhất của ông trong Toán học là khám phá ra một số điểm, đường tròn, tam giác có tính chất đặc biệt mà sau này, các đối tượng đó đều được mang tên ông.

Điểm Brocard của tam giác phẳng Euclid là điểm bên trong của tam giác mà ba góc tạo bởi hai trong số các đỉnh của tam giác và điểm đó bằng nhau. Các góc này được gọi là góc Brocard của tam giác. Điểm Brocard trong tam giác có hai loại, thường được gọi là điểm Brocard thứ nhất và điểm Brocard thứ hai. Trong suốt một chiều dài lịch sử nghiên cứu các điểm đặc biệt trong tam giác, điểm Brocard đã thu hút được sự quan tâm chú ý của nhiều nhà Toán học trên thế giới. Cho đến nay, rất nhiều tính chất của điểm Brocard vẫn tiếp tục được tìm thấy. Vì các đối tượng hình học tam giác liên quan đến điểm Brocard là rất đa dạng nên đã ra đời một nhánh của hình học tam giác, được gọi là hình học Brocard.

Nhà Toán và Khí tượng học người Pháp, Henri Brocard (1845-1922) (nguồn: Wikipedia).

Với mục tiêu tìm hiểu và hệ thống lại một số kết quả cơ bản về điểm Brocard, trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả liên quan tới khoảng cách từ điểm Brocard trong tam giác đến một số điểm đặc biệt như: "***các đỉnh của tam giác, trọng tâm, trực***

tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp." Bên cạnh đó, chúng tôi sẽ đưa ra một số tính chất đặc trưng của góc Brocard. Trong suốt bài viết, chúng tôi sử dụng các kí hiệu sau:

i. A, B, C là ba góc và a, b, c là ba cạnh tương ứng của tam giác ABC;

ii. O và R thứ tự là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp, I và r thứ tự là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp;

iii. h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c.

Ngoài phần Mở đầu và Danh mục tài liệu tham khảo, bài viết còn gồm các mục sau:

Mục 2: Điểm Brocard và một số tính chất của góc Brocard

Tác giả sẽ trình bày về định nghĩa của điểm Brocard cũng như cách dựng điểm này trong mặt phẳng. Sau đó, chúng tôi sẽ đưa ra một vài tính chất của góc Brocard. Các kết quả trong mục 2 đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng các công thức về tính khoảng cách của điểm Brocard đến một số điểm đặc biệt trong tam giác ở mục 3. Tài liệu tham khảo chính của mục 2 là [1, 3].

Mục 3: Khoảng cách từ điểm Brocard đến một số điểm đặc biệt trong tam giác

Trong mục 3, tác giả sẽ xây dựng các công thức tính khoảng từ điểm Brocard thứ nhất tới một số điểm đặc biệt trong tam giác. Đối với điểm Brocard thứ hai, cách xây dựng các công thức tính khoảng cách này là tương tự như đối với điểm Brocard thứ nhất nên trong mục 3, chúng tôi chỉ đề cập đến các kết quả liên quan tới điểm Brocard thứ nhất. Tài liệu tham khảo chính của mục này là [3].

2. ĐIỂM BROCARD VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA GÓC BROCARD

2.1. Điểm Brocard và cách dựng

Đầu tiên chúng ta sẽ đi tới định nghĩa của điểm Brocard trong mặt phẳng.

Định nghĩa 2.1. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c, trong đó các đỉnh lần lượt là A, B, C theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ.

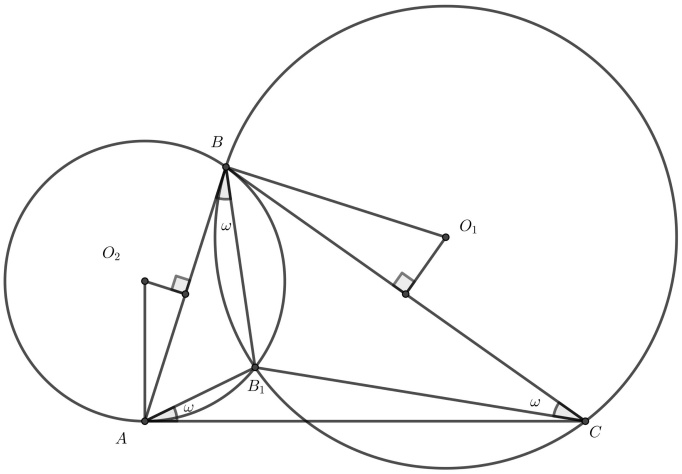
i. Một điểm B_1 trong tam giác ABC gọi là điểm Brocard thứ nhất nếu các đoạn thẳng AB_1, BB_1, CB_1 tạo thành một góc bằng nhau, ω, với các cạnh tương ứng AB, BC, AC, tức là

$$\widehat{ABB_1} = \widehat{BCB_1} = \widehat{CAB_1} = \omega.$$

Góc ω gọi là góc Brocard của tam giác ABC.

ii. Điểm B_2 trong tam giác ABC gọi là điểm Brocard thứ hai nếu các đoạn thẳng AB_2, BB_2, CB_2 tạo thành các góc bằng nhau với các cạnh CA, AB, BC tương ứng, tức là

$$\widehat{ACB_2} = \widehat{BAB_2} = \widehat{CBB_2} = \omega.$$



Cách dựng điểm Brocard trong mặt phẳng:

i. Dựng tam giác ABC.

ii. Dựng đường tròn (O_1) đi qua hai điểm B, C, và nhận AB làm tiếp tuyến tại B.

iii. Dựng đường tròn (O_2) đi qua hai điểm A, B và nhận AC làm tiếp tuyến tại A. Gọi B_1 là giao điểm thứ hai (khác điểm A) của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Khi đó, điểm B_1 chính là điểm Brocard cần dựng.

Thật vậy, ta có

$\widehat{ABB_1} = \widehat{CAB_1}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung của đường tròn (O_2)),

$\widehat{BCB_1} = \widehat{ABB_1}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung của đường tròn (O_1)).

Vì vậy, ta được

$$\widehat{BCB_1} = \widehat{CAB_1} = \widehat{ABB_1} = \omega_1.$$

2.2. Một số tính chất của góc Brocard

Tính chất 2.1. Giả sử ω_1 là góc Brocard tương ứng với điểm Brocard B_1 của tam giác ABC. Khi đó, ta có

$$\cot \omega_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Chứng minh. Đặt $AB_1 = x, BB_1 = y, CB_1 = z$. Áp dụng định lý Cos vào tam giác ABC, ta được

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C.$$

Vì $\frac{c}{\sin C} = 2R$ nên

$$c\frac{\cos C}{\sin C} = 2R\cos C \Leftrightarrow \frac{c}{R}\cot C = 2\cos C$$
$$\Leftrightarrow \frac{abc}{R}\cot C = 2ab\cos C$$
$$\Leftrightarrow 4S\cot C = 2ab\cos C.$$

Kết hợp các kết quả trên, ta suy ra

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C = 4S\cdot\cot C.$$

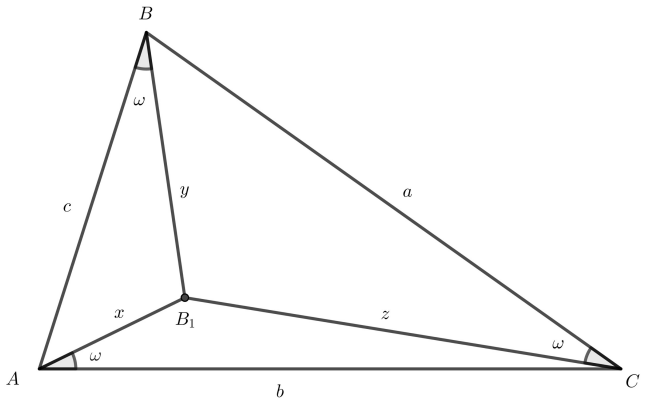
Áp dụng công thức trên vào các tam giác CBB_1, ACB_1, ABB_1, ta có

$$a^2 + z^2 - y^2 = 2az\cos\omega_1 = 4S_{CBB_1}\cdot\cot\omega_1.$$
$$b^2 + x^2 - z^2 = 2bx\cos\omega_1 = 4S_{ACB_1}\cdot\cot\omega_1.$$
$$c^2 + y^2 - x^2 = 2az\cos\omega_1 = 4S_{ABB_1}\cdot\cot\omega_1.$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta kết luận rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S\cdot\cot\omega_1 \Leftrightarrow \cot\omega_1 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □



Nhận xét. Chứng minh tương tự như trên, ta cũng thu được kết quả

$$\cot\omega_2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S},$$

trong đó ω_2 là góc Brocard thứ hai. Vì vậy, ta có $\omega_1 = \omega_2$. Do đó, để thuận tiện, kể từ thời điểm chúng tôi sẽ dùng kí hiệu ω chung cho cả hai góc Brocard.

Hệ quả 2.1. Giả sử ω là góc Brocard của tam giác ABC. Khi đó, ta có

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$$

và

$$\cot\omega = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}.$$

Chứng minh. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}\cot A+\cot B+\cot C&=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\sin B}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin C}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\frac{a}{2R}}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\frac{b}{2R}}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\frac{c}{2R}}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{\frac{abc}{R}}+\frac{a^2+c^2-b^2}{\frac{abc}{R}}+\frac{a^2+b^2-c^2}{\frac{abc}{R}}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\cot\omega.\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}&=\frac{\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}}{2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\cdot\frac{4R^3}{abc}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)R}{abc}\\&=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)R}{4S\cdot R}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\cot\omega.\end{aligned}$$

Như vậy hệ quả 2.1 được chứng minh. □

Tính chất 2.2. Giả sử ω là góc Brocard của tam giác ABC. Khi đó, ta có

$$\frac{1}{\sin^2\omega}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}.$$

Chứng minh. Ta thấy rằng

$$\widehat{CAB_1}+\widehat{ACB_1}=\widehat{BCB_1}+\widehat{ACB_1}=\widehat{ACB}.$$

Xét tam giác ACB_1 có

$$\widehat{AB_1C}=180^\circ-\left(\widehat{CAB_1}+\widehat{ACB_1}\right)\Leftrightarrow\widehat{AB_1C}=180^\circ-\widehat{ACB}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\sin\widehat{AB_1C}=\sin\left(180^\circ-\widehat{ACB}\right)=\sin C.$$

Áp dụng định lý Sin cho tam giác ACB_1, ta được

$$\frac{AC}{\sin\widehat{AB_1C}}=\frac{CB_1}{\sin\widehat{CAB_1}}\text{ hay }\frac{b}{\sin B_1}=\frac{z}{\sin\omega}.$$

Vì vậy $z = \frac{b\sin\omega}{\sin C}$ Chứng minh tương tự, ta có

$$x = \frac{c\sin\omega}{\sin A}, y = \frac{a\sin\omega}{\sin B}.$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} S_{ACB_1} = \frac{1}{2}xz \cdot \sin\widehat{AB_1C} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{c\sin\omega}{\sin A}\cdot\frac{b\sin\omega}{\sin C}\cdot\sin C \\ &= \frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sin A}{\sin^2 A}\cdot\sin^2\omega \\ &= S\cdot\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 A}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự như trên, ta được

$$S_{CBB_1} = S\cdot\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 C}, \quad S_{ABB_1} = S\cdot\frac{\sin^2\omega}{\sin^2 B}.$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta suy ra

$$S = S\cdot\sin^2\omega\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\right).$$

Điều này chứng tỏ

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 2.2. Trong tam giác ABC, ta có

$$4R^2\sin^2\omega = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^c+a^2c^2}.$$

Chứng minh. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} & 4R^2\sin^2\omega = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^c+a^2c^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4R^2\sin^2\omega} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{4R^2}{a^2}+\frac{4R^2}{b^2}+\frac{4R^2}{c^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{4R^2}{4R^2\sin^2 A}+\frac{4R^2}{4R^2\sin^2 B}+\frac{4R^2}{4R^2\sin^2 C} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}. \end{aligned}$$

Hệ quả 2.2 được chứng minh. □

Tính chất 2.3. Giả sử ω là góc Brocard của tam giác ABC. Khi đó, ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{2}\min\{A,B,C\} \le \omega \le 30^\circ.$$

Chứng minh. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, ta được

$$\begin{aligned}\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C &= \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}\\ &= 1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\left(1-\cos^2 C\right)\\ &= 2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C\\ &= 2-\cos(A-B)\cos C-\cos^2 C\\ &\le 2+\cos C-\cos^2 C\\ &= \frac{9}{4}-\left(\cos C-\frac{1}{2}\right)\le\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số thực dương, ta được

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 3\sqrt[3]{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}$$

và

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}}=\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}}.$$

Nhân vế theo vế của hai bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\right)\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\ge 9,$$

hay ta có

$$\frac{1}{\sin^2\omega}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ge\frac{9}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\ge\frac{9}{\frac{9}{4}}\ge 4.$$

Điều này chứng tỏ

$$\frac{1}{\sin^2\omega}\le\frac{1}{4}\ \text{ hay }\ \sin\omega\le\frac{1}{2}.$$

Vì vậy, ta được $\omega\le 30^\circ$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\omega\ge\frac{1}{2}\min\{A,B,C\}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\widehat{A}\le\widehat{B}\le\widehat{C}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, AI cắt BD tại D. Giả sử $\omega<\frac{1}{2}\widehat{A}$. Khi đó, ta thấy rằng

$$\omega=\widehat{CAB_1}<\frac{1}{2}=\widehat{CAI}$$

nên tia CB_1 nằm trong $\widehat{CAI}$. Lại có

$$\omega=\widehat{BCB_1}<\frac{1}{2}\widehat{C}=\widehat{BCI}$$

nên tia CB_1 nằm trong $\widehat{BCI}$. Từ hai kết quả này, ta thấy rằng điểm B_1 nằm trong tam giác ICD và nằm ngoài tam giác IAB. Do đó

$$\omega = \widehat{ABB_1} > \widehat{ABI} = \frac{1}{2}\widehat{B} \geq \frac{1}{2}\widehat{A}.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\omega < \frac{1}{2}\widehat{A}$. Vậy $\omega \geq \frac{1}{2}\widehat{A}$ hay

$$\omega \geq \frac{1}{2}\min\{A, B, C\}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

3. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM BROCARD ĐẾN MỘT SỐ ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

Định lý 3.1. *Cho điểm X nằm trong tam giác ABC. Giả sử B_1 là điểm Brocard thứ nhất của tam giác ABC. Khi đó, ta có*

$$\overrightarrow{XB_1} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \cdot \overrightarrow{XA} + \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \cdot \overrightarrow{XB} + \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \cdot \overrightarrow{XC}. \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử AB_1, CB_1 kéo dài cắt các cạnh BC và BA lần lượt tại M và N. Vì hai tam giác ABM và ACM có chung đường cao hạ từ A nên

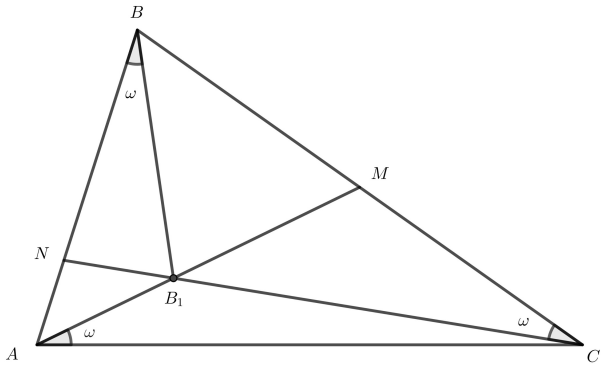
$$\begin{aligned}\frac{BM}{CM} = \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} &= \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AM \cdot \sin\widehat{BAM}}{\frac{1}{2}AC \cdot AM \cdot \sin\widehat{MAC}} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin A\cos\omega - \cos A\sin\omega}{\sin\omega}.\end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\frac{BM}{CM} = \frac{c}{b} \cdot \left(\sin A \cdot \frac{\cos\omega}{\sin\omega} - \cos A\right) = \frac{c}{b} \cdot (\sin A \cdot \cot\omega - \cos A).$$

Áp dụng hệ thức $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$, ta được

$$\begin{aligned}\frac{BM}{CM} &= \frac{c}{b} \cdot [\sin A(\cot A + \cot B + \cot C) - \cos A] \\ &= \frac{c}{b} \cdot [\sin A(\cot B + \cot C)] = \frac{c}{b} \cdot \sin A\left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}\right) \\ &= \frac{c}{b} \cdot \sin A\left(\frac{\sin C\cos B + \cos C\sin B}{\sin B \cdot \sin C}\right) \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin(B+C)}{\sin B \cdot \sin C} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin(\pi - A)}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin^2 A}{\sin B \cdot \sin C}.\end{aligned}$$



Kết hợp kết quả trên và định lý Sin trong tam giác, ta suy ra

$$\frac{BM}{CM} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin^2 A}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^2}{\frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Chứng minh tương tự, ta thu được kết quả

$$\frac{NB}{NA} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABM với cát tuyến NB_1C, ta có

$$\begin{aligned} 1 &= (ABN) \cdot (BMC) \cdot (MAB_1) \\ &= \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{B_1M}}{\overline{B_1A}} \\ &= \left(-\frac{NA}{NB}\right) \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \left(-\frac{B_1M}{B_1A}\right) \\ &= \frac{NA}{NB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{B_1M}{B_1A}. \end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\frac{MB_1}{B_1A} = \frac{NB}{NA} \cdot \frac{MC}{BC}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được

$$\frac{CM}{MB} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{CM}{CM + MB} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

Hơn nữa, ta có $\frac{NB}{NA} = \frac{a^2}{c^2}$. Kết hợp các quả trên, ta suy ra

$$\frac{MB_1}{B_1A} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{c^2\left(a^2 + b^2\right)}.$$

Kết quả này dẫn đến

$$\overrightarrow{B_1M} = -\frac{a^2b^2}{c^2\left(a^2 + b^2\right)} \overrightarrow{B_1A}. \tag{2}$$

Vì $\frac{BM}{CM} = \frac{a^2}{b^2}$ nên

$$\begin{aligned} b^2\overrightarrow{BM} = a^2\overrightarrow{MC} &\Leftrightarrow b^2\left(\overrightarrow{B_1M} - \overrightarrow{B_1B}\right) = a^2\left(\overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{B_1M}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad b^2\overrightarrow{B_1M} - b^2\overrightarrow{B_1B} = a^2\overrightarrow{B_1C} - a^2\overrightarrow{B_1M} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(a^2+b^2\right)\overrightarrow{B_1M} = a^2\overrightarrow{B_1C} + b^2\overrightarrow{B_1B}. \end{aligned}$$

Kết hợp kết quả này với (2), ta được

$$-\left(a^2+b^2\right)\frac{a^2b^2}{c^2\left(a^2+b^2\right)}\overrightarrow{B_1A} = a^2\overrightarrow{B_1C} + b^2\overrightarrow{B_1B},$$

hay ta có

$$-\frac{a^2b^2}{c^2}\overrightarrow{B_1A} = a^2\overrightarrow{B_1C} + b^2\overrightarrow{B_1B} \Leftrightarrow a^2b^2\overrightarrow{B_1A} + b^2c^2\overrightarrow{B_1B} + c^2a^2\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{0}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\begin{aligned} &a^2b^2\left(\overrightarrow{B_1X} + \overrightarrow{XA}\right) + b^2c^2\left(\overrightarrow{B_1X} + \overrightarrow{XB}\right) + c^2a^2\left(\overrightarrow{B_1X} + \overrightarrow{XC}\right) = \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow &\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)\overrightarrow{B_1X} + a^2b^2\overrightarrow{XA} + b^2c^2\overrightarrow{XB} + c^2a^2\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow &\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)\overrightarrow{XB_1} = a^2b^2\overrightarrow{XA} + b^2c^2\overrightarrow{XB} + c^2a^2\overrightarrow{XC}. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có

$$\overrightarrow{XB_1} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\overrightarrow{XA} + \frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\overrightarrow{XB} + \frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\overrightarrow{XC}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đẳng thức $a^2b^2\overrightarrow{B_1A} + b^2c^2\overrightarrow{B_1B} + c^2a^2\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{0}$ trên chứng tỏ điểm B_1 là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số tương ứng là a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2. Tiếp theo, để thuận tiện trong việc tính toán, ta đặt

$$\lambda_1 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \quad \lambda_3 = \frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Khi đó, ta thấy rằng

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} = 1,$$

và

$$\overrightarrow{XB_1} = \lambda_1\overrightarrow{XA} + \lambda_2\overrightarrow{XB} + \lambda_3\overrightarrow{XC}.$$

Bình phương vô hướng hai vế của đẳng thức này, ta được

$$\begin{aligned} XB_1^2 = \overrightarrow{XB_1}^2 &= \left(\lambda_1\overrightarrow{XA} + \lambda_2\overrightarrow{XB} + \lambda_3\overrightarrow{XC}\right)^2 \\ &= \lambda_1^2\overrightarrow{XA}^2 + \lambda_2^2\overrightarrow{XB}^2 + \lambda_3^2\overrightarrow{XC}^2 + 2\lambda_1\lambda_2\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB} + 2\lambda_1\lambda_3\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}2\lambda_2\lambda_3\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC} \\ &= \lambda_1^2XA^2 + \lambda_2^2XB^2 + \lambda_3^2XC^2 + 2\lambda_1\lambda_2\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB} + 2\lambda_1\lambda_3\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC} + 2\lambda_2\lambda_3\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB} &= \overrightarrow{XA}^2+\overrightarrow{XB}^2-(\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB})^2\\ &= \overrightarrow{XA}^2+\overrightarrow{XB}^2-\overrightarrow{AB}^2 = XA^2+XB^2-AB^2 = XA^2+XB^2-c^2.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$2\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XC} = XB^2+XC^2-a^2 \quad \text{và} \quad 2\overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{XA} = XC^2+XA^2-b^2.$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned}XB_1^2 =&\lambda_1^2XA^2+\lambda_2^2XB^2+\lambda_3^2XC^2+\lambda_1\lambda_2\left(XA^2+XB^2-c^2\right)\\ &+\lambda_2\lambda_3\left(XB^2+XC^2-a^2\right)+\lambda_1\lambda_3\left(XC^2+XA^2-b^2\right)\\ =&\left(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3\right)XA^2+\left(\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3\right)XB^2\\ &+\left(\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right)XC^2-\left(\lambda_1\lambda_2c^2+\lambda_2\lambda_3a^2+\lambda_1\lambda_3b^2\right).\end{aligned}$$

Vì $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ nên

$$\begin{aligned}\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3 &= \lambda_1\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right) = \lambda_1,\\ \lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3 &= \lambda_2\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right) = \lambda_2,\\ \lambda_3^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3 &= \lambda_3\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right) = \lambda_3.\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2c^2+\lambda_2\lambda_3a^2+\lambda_1\lambda_3b^2 &= \frac{a^2b^4c^4+a^4b^2c^4+a^4b^4c^2}{\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2}\\ &= \frac{a^2b^2c^2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.\end{aligned}$$

Từ các kết quả trên, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}XB_1^2 &= \lambda_1XA^2+\lambda_2XB^2+\lambda_3XC^2-\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\\ &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}XA^2+\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}XB^2\\ &\quad+\frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}XC^2-\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\\ &= \frac{a^2b^2XA^2+b^2c^2XB^2+c^2a^2XC^2-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.\end{aligned}$$

Như vậy, từ Định lý 3.1, chúng ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 3.1. *Cho điểm X nằm trong tam giác ABC. Khi đó, ta có*

$$XB_1^2 = \frac{a^2b^2XA^2+b^2c^2XB^2+c^2a^2XC^2-a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}, \tag{3}$$

với B_1 là điểm Brocard thứ nhất của tam giác ABC.

Nhận xét. Hệ quả trên cho chúng ta công thức tổng quát tính khoảng cách từ điểm Brocard đến các điểm đặc biệt trong tam giác. Cụ thể, chúng ta sẽ cho điểm X trùng với các điểm đặc biệt mà chúng ta cần tính khoảng cách, sau đó sử dụng công thức (3). Mấu chốt trong các phần tiếp theo là chúng ta chỉ cần tính được khoảng cách từ điểm đặc biệt nào đó tới ba đỉnh A, B, C.

3.1. Khoảng cách từ điểm Brocard thứ nhất tới ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC

Cho $X \equiv A$ trong Hệ quả 3.1, ta được

$$AB_1^2 = XB_1^2 = \frac{a^2b^2AA^2 + b^2c^2AB^2 + c^2a^2AC^2 - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{b^2c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Lần lượt cho $X \equiv B$ và $X \equiv C$ trong công thức (3), ta có

$$BB_1^2 = \frac{c^2a^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad CB_1^2 = \frac{a^2b^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&(AB_1 + BB_1 + CB_1)^2 \\
&= \left(\frac{bc^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} + \frac{ca^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} + \frac{ab^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right)^2 \\
&\le \left[\left(\frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right)^2 + \left(\frac{ca}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right)^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right)^2\right] \\
&\quad \times \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = a^2 + b^2 + c^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy, ta được $AB_1 + BB_1 + CB_1 \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Do đó, ta thu được kết quả sau:

Định lý 3.2. *Trong tam giác ABC, ta có*

$$AB_1 = \frac{bc^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad BB_1 = \frac{ca^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad CB_1 = \frac{ab^2}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Hơn nữa, ta có

$$AB_1 + BB_1 + CB_1 \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

3.2. Khoảng cách từ điểm Brocard thứ nhất tới tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC

Do $OA = OB = OC = R$ nên khi cho $X \equiv O$ trong (3), ta suy ra

$$\begin{aligned}
OB_1^2 &= \frac{(a^2b^2OA^2 + b^2c^2OB^2 + c^2a^2OC^2) - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\
&= \frac{\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)R^2 - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\
&= \frac{\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)R^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\
&= R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\
&= R^2 - 4R^2\sin^2\omega = R^2\left(1 - 4\sin^2\omega\right).
\end{aligned}$$

Như vậy, ta thu được kết quả sau:

Định lý 3.3. *Trong tam giác ABC, ta có*

$$OB_1 = R\sqrt{1 - 4\sin^2\omega}.$$

3.3. Khoảng cách từ điểm Brocard thứ nhất tới tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC

Trước hết, chúng ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. Trong tam giác ABC, ta có

$$IA^2 = bc - 4Rr, \quad IB^2 = ca - 4Rr, \quad IC^2 = ab - 4Rr.$$

Chứng minh. Gọi M, N, K lần lượt là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$AK = AN, BM = BK, CN = CM.$$

Từ đây, ta suy ra

$$AK + BM + CN = AN + BK + CM.$$

Hơn nữa, ta có

$$AK + KB + BM + MC + CN + NA = AB + BC + CA = a + b + c = 2p.$$

Kết hợp các kết quả trên, ta thấy rằng

$$p = AK + BM + CN = AK + BM + CM = AK + BC = AK + a.$$

Do đó $AK = p - a$. Mặt khác, áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông AIK, ta được

$$\begin{aligned} AI^2 &= AK^2 + KI^2 = (p-a)^2 + r^2 \\ &= \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)^2 + r^2 = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + r^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Chú ý rằng

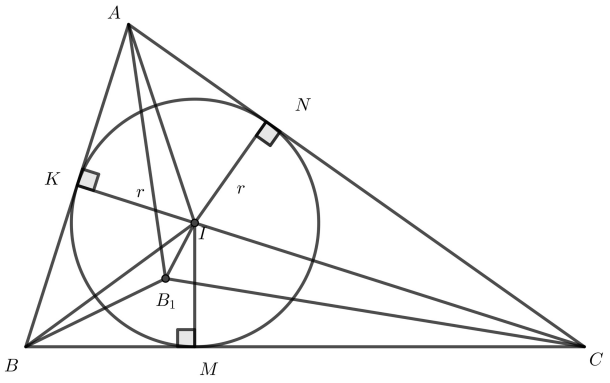
$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S.$$

Điều này suy ra

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Thay kết quả này vào (4), ta được

$$\begin{aligned} AI^2 &= \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\ &= \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} \\ &= \frac{b+c-a}{4(a+b+c)} \cdot [(b+c-a)(a+b+c) + (a+c-b)(a+b-c)] \\ &= \frac{b+c-a}{4(a+b+c)} \cdot 4bc = \frac{bc(b+c-a)}{(a+b+c)}. \end{aligned}$$



Mặt khác, ta có

$$BC - 4Rr = bc - \frac{abc}{S}\cdot r = bc - \frac{abc}{pr}\cdot r = bc - \frac{abc}{p} = bc - \frac{abc}{\frac{a+b+c}{2}}$$
$$= bc - \frac{2abc}{a+b+c} = \frac{abc + b^2c + bc^2 - 2abc}{a+b+c} = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}.$$

Từ các kết quả trên, ta thấy rằng $IA^2 = bc - 4Rr$. Chứng minh tương tự, ta suy ra $IB^2 = ca - 4Rr, IC^2 = ab - 4Rr$. Bổ đề 3.1 được chứng minh. □

Cho $X \equiv I$ trong công thức (1) và sử dụng bổ đề 3.1, ta được

$$IB_1^2 = \frac{a^2b^2IA^2 + b^2c^2IB^2 + c^2a^2IC^2 - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$
$$= \frac{a^2b^2(bc - 4Rr) + b^2c^2(ac - 4Rr) + c^2a^2(ab - 4Rr) - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$
$$= \frac{a^2b^3c - 4Rra^2b^2 + ab^2c^3 - 4Rrb^2c^2 + a^3bc^2 - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$
$$= \frac{(a^2b^3c + ab^2c^3 + a^3bc^2 - a^2b^2c^2) - 4Rr\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$
$$= \frac{abc\,(ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - 4Rr.$$

Như vậy, ta thu được kết quả sau:

Định lý 3.4. *Trong tam giác ABC, ta có*

$$IB_1 = \sqrt{\frac{abc\,(ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - 4Rr}.$$

3.4. Khoảng cách từ điểm Brocard thứ nhất tới trọng tâm G của tam giác ABC

Để xây dựng công thức tính khoảng cách trong phần này, đầu tiên chúng ta sẽ chứng minh kết quả sau:

Bổ đề 3.2. Trong tam giác ABC, ta có

$$GA^2 = \frac{2\,(b^2 + c^2) - a^2}{9}, \quad GB^2 = \frac{2\,(a^2 + c^2) - b^2}{9}, \quad GC^2 = \frac{2\,(a^2 + b^2) - c^2}{9}.$$

Chứng minh. Áp dụng định lý Cosin vào tam giác ABM, ta được

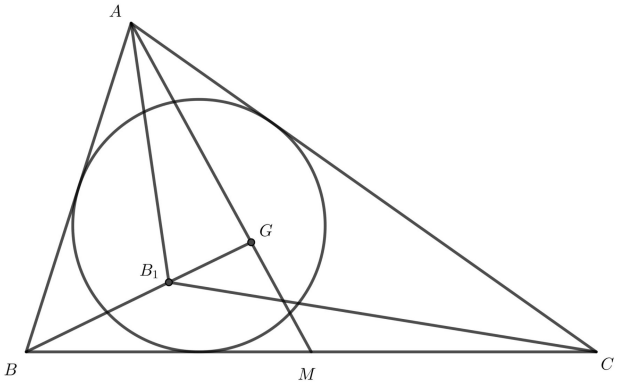
$$AM^2 = BA^2 + BM^2 - 2BA \cdot BM \cdot \cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ca\cos B.$$

Chú ý rằng

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Do đó, ta có

$$AM^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{ac}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}.$$



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{9}.$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$GB^2 = \frac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{9}, \quad GC^2 = \frac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{9}.$$

Bổ đề 3.2 được chứng minh. □

Cho $X \equiv G$ trong công thức (1) và sử dụng bổ đề 3.2, ta suy ra

$$\begin{aligned} GB_1^2 &= \frac{a^2b^2GA^2 + b^2c^2GB^2 + c^2a^2GC^2 - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ &= \frac{a^2b^2 \cdot \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{9} + b^2c^2 \cdot \frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{9} + c^2a^2 \cdot \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{9} - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ &= \frac{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - 3\left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2\right) - 9(abc)^2}{9\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)} \\ &= \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{3(abc)^2 + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2}{3\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)}. \end{aligned}$$

Do đó, ta nhận được kết quả sau:

Định lý 3.5. *Trong tam giác ABC, ta có*

$$GB_1 = \sqrt{\frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{3(abc)^2 + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2}{3\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)}}.$$

3.5. Khoảng cách từ điểm Brocard thứ nhất tới trực tâm H của tam giác ABC

Để xây dựng công thức tính khoảng cách từ điểm Brocard thứ nhất tới trực tâm H của tam giác ABC, chúng ta cần hai bổ đề. Bổ đề thứ nhất là một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng và thường được biết đến với tên gọi là đường thẳng Euler.

Bổ đề 3.3. Trong tam giác ABC, trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng nằm trên một đường thẳng. Hơn nữa $OH = 3OG$.

Chứng minh. Gọi D là trung điểm của BC. Kéo dài đoạn AO cắt đường tròn tâm O tại A'. Khi đó, ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GD}$. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

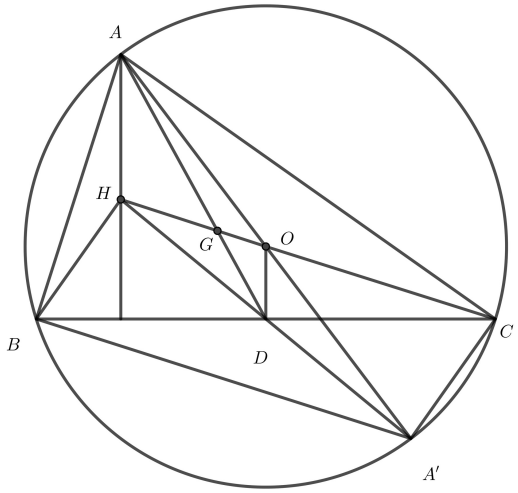
$$\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA}.$$

Kết hợp hai kết quả trên, ta được

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Sử dụng kết quả này, ta suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$



Vì A' đối xứng với A qua O nên AA' là đường kính của đường tròn (O). Do đó, ta có

$$\widehat{ACA'} = 90^o \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O)),$$

hay $A'C \perp AC$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH \perp AC$. Vì vậy, ta được $A'C // BH$. Chứng minh tương tự $A'B // CH$. Các kết quả vừa thu được chứng tỏ tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, mà D là trung điểm của BC nên D cũng là trung điểm của

HA', hay ba điểm H, A, A' thẳng hàng. Chú ý rằng OD là đường trung bình ứng với cạnh AH trong tam giác AHA' nên ta có $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Từ đây, ta được

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH},$$

hay

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Kết quả này chứng tỏ ba điểm G, O, H thẳng hàng và $OH = 3OG$. □

Từ chứng minh của bổ đề 3.3, ta thu được kết quả sau:

Bổ đề 3.4. Trong tam giác ABC, ta có

$$HA^2 = 4R^2 - a^2, \quad HB^2 = 4R^2 - b^2, \quad HC^2 = 4R^2 - c^2.$$

Chứng minh. Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông OBD và chú ý rằng $HA = 2OD$, ta suy ra

$$HA^2 = 4OD^2 = 4\left[R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = 4R^2 - a^2.$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$HB^2 = 4R^2 - b^2, HC^2 = 4R^2 - c^2.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Cho $X \equiv H$ trong công thức (1) và sử dụng bổ đề 3.4, ta có

$$\begin{aligned} HB_1^2 &= \frac{a^2b^2HA^2 + b^2c^2HB^2 + c^2a^2HC^2 - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ &= \frac{a^2b^2\left(4R^2 - a^2\right) + b^2c^2\left(4R^2 - b^2\right) + c^2a^2\left(4R^2 - c^2\right) - a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ &= 4R^2 - \frac{(abc)^2 + \left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2\right)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta thu được kết quả sau:

Định lý 3.6. *Trong tam giác ABC, ta có*

$$HB_1 = \sqrt{4R^2 - \frac{(abc)^2 + \left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2\right)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] N. Q. Dương, *Hai điểm Brocard*, Tạp chí Toán Epsilon, số 13, 2020, 123-138.

[2] N. T. Hằng, *Các hệ thức liên quan đến điểm và đường đặc biệt trong tam giác*, Luận văn Thạc sĩ Toán học, Đại học Thái Nguyên, 2016.

[3] N. T. Tiến, *Về điểm Brocard trong tam giác*, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 411 (9-2011), 10-12.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Brocard`

A CONVERGENT SUBSEQUENCE OF {sin n}

Vũ Quang Huy
Xã Đại Đức, huyện Kiên Thành, tỉnh Hải Dương
Nguyễn Thị Thu Hà
Trường THCS thị trấn Gia Bình, huyện Gia Bình, Bắc Ninh

Abstract. *In this paper we discuss on the sequence* $\{\sin n\}$. *The range of* $\{\sin n\}$ *is* $[-1, 1]$, *and therefore by using Bolzano-Weierstrass theorem, we have the existence of a convergent subsequence. We try to describe what this convergent subsequence looks like. Besides, we also present a proof that the number* π *is irrational.*

1. INTRODUCTION

In calculus, we all learned about the Bolzano-Weierstrass theorem, in which the existence of a convergent subsequence of a given bounded sequence is proved. One day, our teacher gave us a prolem: Can you like find a convergent subsequence of $\{\sin n\}$, or at least tell me how does it look like? When this problem was given in our class, there was a student who made a mistake. He said that the subsequence of $\{\sin n\}$ is $\{\sin k\pi\}$, but he clearly was wrong because $k\pi$ is not an integer. After that, we all knew that problem is not easy at all. Our teacher told us that some hints can be found in the books [1, 6] and on the Internet. Firstly, the wrong answer $\{\sin k\pi\}$ is a suggestion about finding a natural number which is an approximation of $k\pi$. Secondly, we have to prove that π is irrational to use the corollary in [3]. Then we will be able to describe a convergent subsequence of $\{\sin n\}$.

We did some researches and discovered that a number of works have studied the sequence of numbers. However, they have not investigated the subsequence of the sequence $\{\sin n\}$ in depth. The problem increases some understanding of calculus and proofs using the analytic information obtained in the university curriculum, in addition to finding out if anyone else has solved it.

2. PRELIMINARIES

We begin with the common notion of sequences:

Definition 2.1. [2] A sequence $\{u_n\}$ is a function u from the set of positive integers $\mathbb{Z}^+$ to the set of real numbers $\mathbb{R}$, which is defined by $u(n) = u_n$. We can also say that the sequence $\{u_n\}$ is a collection of real numbers $u_1, u_2, u_3, \ldots$

The number u_n is called a term of the sequence $\{u_n\}$. A sequence has infinitely many terms. From other sources, the term u_0 can be considered.

Example 2.1. The sequence $\{u_n\}$, defined by $u_n = \frac{1}{n}$, is the set

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

When we increase the value of n, this sequence's terms tend to zero.

Example 2.2. A numerical sequence is completely determined by its general term u_n, but sometimes we get in trouble with finding the formula for u_n.

Let the following sequence $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ As we know the Fibonacci sequence, and the recurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. We can easily find the values of $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$. So it is natural to ask: How to determine the values of u_{100}, u_{1000}? What is the general formula for u_n?
We consider the quadratic equation

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{1}$$

Since $\Delta_1 = 5 > 0$, the equation $x^2 - x - 1 = 0$ has two distinct roots $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ and $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Let $u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$, where α, β are scalar. We will show that $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. We have

$$u_{n+2} = \alpha x_1^{n+2} + \beta x_2^{n+2}.$$

On the other hand, from x_1, x_2 are roots of the equation $x^2 - x - 1 = 0$, we get

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 - 1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} - x_1^{n+1} - x_1^n = 0 \\ x_2^{n+2} - x_2^{n+1} - x_2^n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} = x_1^{n+1} + x_1^n \\ x_2^{n+2} = x_2^{n+1} + x_2^n. \end{cases}$$

We have

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \alpha x_1^{n+1} + \beta x_2^{n+1} + \alpha x_1^n + \beta x_2^n \\ &= \alpha(x_1^{n+1} + x_1^n) + \beta(x_2^{n+1} + x_2^n) = \alpha x_1^{n+2} + \beta x_2^{n+2} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

Now we find α and β, which are also the roots of the following system:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = u_1 = 1 \\ \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = u_2 = 1. \end{cases}$$

We obtain $\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ and the formula of u_n is

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

This is an increasing sequence and it can not be bounded by any number.

The two sequences in the examples above behave differently as n approaches to ∞. Precisely, this is all about the limit of a sequence, and we have the following definition:

Definition 2.2. [2] Let $\{u_n\}$ be a sequence. A number a is called the limit of $\{u_n\}$ if for all $\epsilon > 0$ there exists $N_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq N_0$ we have

$$|u_n - a| < \epsilon.$$

Then we denote $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, and $\{u_n\}$ is said to be convergent. A sequence which does not have a finite limit is called a divergent sequence.

Example 2.3. Clearly, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, and $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ is a convergent sequence.

Step 1. Find n_0:

We need $\mid u_n-0\mid<\epsilon$, which is equivalent to

$$\left|\frac{1}{n}\right|<\epsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\epsilon}.$$

Choose $n_0=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$.

Step 2. For all $\epsilon>0$ and $n_0=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$, we have

$$\forall n>n_0,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|<\epsilon\Leftrightarrow|u_n-0|<\epsilon.$$

By definition of the limit of a sequence, it follows that $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

In contrast, the Fibonacci sequence is divergent. A more difficult one which we will use later is

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0. \tag{2}$$

The following inequality

$$0<|\frac{a^n}{n!}|<\frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m},$$

where $n>m+1>|a|$ can be used to assertion prove this. From a given sequence, we can derive a subsequence as follows:

Definition 2.3. [2] If $\{a_n\}_{n\geq1}$ is a sequence of real numbers and if $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ is an increasing sequence of positive integer, then the sequence $\{a_{n_k}\}_{k\geq1}$ is called a subsequence of $\{a_n\}_{n\geq1}$.

Example 2.4. The sequence $\{u_n\}$ defined $u_n=n$. Then, the sequence $\{2n\}$ is a subsequence of the sequence $\{u_n\}$.

The following theorem is a fundamental result about having a convergent subsequence (and can be applied to a divergent sequence):

Definition 2.4. [2] The sequence $\{u_n\}$ is bounded if the set $\{u_n|n\in\mathbb{N}^*\}$ is bounded set, this happens if and only if exists $M>0$ such that $|u_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Example 2.5. The sequence $\{u_n\}$ defined $u_n=\frac{4n-3}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, is a bounded sequence. We see that

$$u_0=\frac{4\cdot0-3}{2\cdot0+1}=-3,\quad u_1=\frac{4\cdot1-3}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3},$$

$$u_2=\frac{4\cdot2-3}{2\cdot2+1}=1,\qquad u_3=\frac{4\cdot3-3}{2\cdot3+1}=\frac{9}{7},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

From the above observation, we can predict that $u_n > -3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. By induction, we can prove that the sequence is bounded below by -3. On the other hand, we have

$$u_n = \frac{4n-3}{2n+1} = \frac{2.(2n+1)-5}{2n+1} = 2 - \frac{5}{2n+1} < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

This shows that the sequence is bounded above by 2.

Theorem 2.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** [6] *A bounded sequence has a convergent subsequence.*

3. THE IRRATIONALITY OF π

Our main goal in this section is to prove the following result.

Proposition 3.1. The real number π is an irrational number.

There are many proof that π is irrational (see [3, 4, 5]). In the 18th century, one proof is given by Johann Heinrich Lambert (1728-1777), in which he showed that a continued fraction expansion of $\tan(x)$ holds. Then he proved that if x is rational, $\tan(x)$ must be irrational. Since $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ is rational, π must be irrational. In this paper, we want to present a proof that requires only basic calculus, so we follow the method of Ivan Niven (1915-1999) [3], a Canadian-American mathematician. By now a standard routine, to prove the main theorem in this paper, we need the basis lemma stated as follows:

Lemma 3.1. [2] Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be non-negative and continuous on $[a, b]$. If $f(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$ then $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

Hint: One way to prove this is using the Cantor's intersection theorem.

Now we will show that π is irrational.

Proof. Suppose $\pi = \frac{a}{b}$ where $a, b \in \mathbb{Z}$ and $b > 0$. We define

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

and

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

for every positive integer n.

For $x = 0$ and $x = \pi = \frac{a}{b}$, we show that $f(x)$ and $f^{(i)}(x)$ are integers. Indeed, f can be expanded as

$$f(x) = \frac{1}{n!}\left(x^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (bx)^k a^{n-k}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^{n-k} b^k x^{n+k},$$

where the coefficient of x^p is a number $\frac{c_p}{n!}$, $c_p \in \mathbb{Z}$ and $c_p = 0$ if $p < n$. Thus $f^{(p)}(0) = 0$ if $p < n$ and

$$f^{(p)}(0) = \frac{p!c_p}{n!},$$

which is also an integer if $n \leq p \leq 2n$. So $f^{(p)}(0) \in \mathbb{Z}$ and therefore $F(0) \in \mathbb{Z}$.

On the other hand, $f(\pi - x) = f(x)$ implies that

$$(-1)^p f^{(p)}(\pi - x) = f^{(p)}(x),$$

thus $(-1)^p f^{(p)}(\pi) = f^{(p)}(0)$. Since $f^{(p)}(0)$ is an integer, $f^{(p)}(\pi)$ is an integer and so $F(\pi)$ is an integer. Consider

$$\begin{aligned} F''(x) + F(x) &= f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) \\ &\quad + f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

We get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) &= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x + F(x)\sin x - F'(x)\cos x \\ &= F''(x)\sin x + F(x)\sin x \\ &= f(x)\sin x. \end{aligned}$$

By Fundemental Theorem of Calculus we have

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

For all $x \in (0, \pi)$, since $f(x) > 0$ and $\sin x > 0$, $f(x)\sin x > 0$. By applying Lemma 3.1 in this situation, one can have

$$F(\pi) + F(0) = \int_0^\pi f(x)\sin x > 0.$$

On the other hand, for all $x \in [0, \pi]$ the inequalities

$$0 \leq x(a - bx) \leq \pi a \quad \text{and} \quad 0 \leq \sin x \leq 1$$

hold. Therefore

$$0 < f(x)\sin x < \frac{(\pi a)^n}{n!}, \quad \forall x \in (0, \pi),$$

and

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx \leq \int_0^\pi \frac{(\pi a)^n}{n!} dx = \pi \frac{(\pi a)^n}{n!}.$$

From the result

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

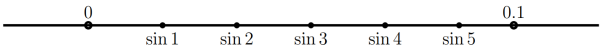
we see that

$$F(\pi) + F(0) = \int_0^\pi (f(x)\sin x) dx$$

is a positive integer but tends to zero as n approaches infinity, which is a contradiction. □

About proving π is irrational, we find out that other authors' proofs are quite complicated. Therefore, based on the contents that we learned at the University, we will provide a way to prove π is irrational, using the contrary method.

4. A CONVERGENT SUBSEQUENCE OF $\sin n$



Values of $\{\sin n\}$ with $n = 1, 2, 3, 4, 5$ on the real line.

Now we consider the sequence $\{\sin n\}$. Since $|\sin n| \leq 1, \forall n$, it follows that this is a bounded sequence. By applying Bolzano-Weierstrass theorem, we know that there exists a subsequence of $\{\sin n\}$ which is convergent. To describe its convergent subsequence, we need the following result:

Lemma 4.1. [1] For any irrational number α and for any positive integer n there exists a positive integer q_n and an integer p_n such that

$$|\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Proof. Fix $n \in \mathbb{N}$ and consider the $n+1$ real numbers $0, \alpha - [\alpha], 2\alpha - [2\alpha], \ldots, n\alpha - [n\alpha]$. Each of them belongs to the interval $[0, 1)$. We now show that if $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq q$ then $p\alpha - [p\alpha] \neq q\alpha - [q\alpha]$. Indeed, if $p\alpha - [p\alpha] = q\alpha - [q\alpha]$ then $p\alpha - q\alpha = (p-q)\alpha = [p\alpha] - [q\alpha]$. Since $p - q, [p\alpha] - [q\alpha] \in \mathbb{Z}$ and α is an irrational number, we get

$$p - q = [p\alpha] - [q\alpha] = 0 \quad \text{or} \quad p = q.$$

Since the n intervals $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, cover $[0, 1)$, there must be one which contains at least two of these points, say $n_1\alpha - [n_1\alpha]$ and $n_2\alpha - [n_2\alpha]$ with $0 \leq n_1 < n_2 \leq n$. So, we have

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - n_1\alpha + [n_1\alpha]| < \frac{1}{n}.$$

Now by taking $q_n = n_2 - n_1$ and $p_n = [n_2\alpha] - [n_1\alpha]$, we obtain

$$|\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{n}.$$

We complete the proof. □

In conclusion, because π is an irrational number, we can substitute π for α in

$$|\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{n}.$$

Then there exist a positive integer q_n and a positive integer p_n such that

$$|\pi q_n - p_n| < \frac{1}{n}.$$

Thus

$$|\sin p_n| = |\sin(p_n - \pi q_n)| \leq |p_n - \pi q_n| < \frac{1}{n} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

We can conclude that $\{\sin p_n\}$ is the convergent subsequence of $\{\sin n\}$.

Similarly, we may answer the following question:

Example 4.1. [1] Is zero a limit point of the sequence $\{\sqrt{n}\sin n\}$?

Proof. We know that for any positive integer n there exist a positive integer q_n and an integer p_n such that

$$|2\pi q_n - p_n| < \frac{1}{n}.$$

Thus, we get

$$|p_n| < 2\pi q_n + \frac{1}{n} \leq 2\pi n + \frac{1}{n},$$

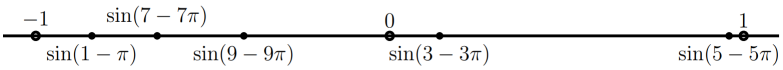
and consequently

$$\left|\sqrt{|p_n|}\sin p_n\right| = \left|\sqrt{|p_n|}\sin 2\pi q_n p_n\right| \leq \left|\sqrt{|p_n|}\sin\frac{1}{n}\right| \leq \frac{\sqrt{2\pi n + \frac{1}{n}}}{n}.$$

Therefore 0 is a limit point of $\{u_n\}$. □

Lastly, we give a descriptive image (some elements) of the sequence $\{\sin p_n\}$, where

$$p_n = \sin(n - \pi n).$$



Values of $\{\sin p_n\}$ with $n = 1, 3, 5, 7, 9$, on the real line.

Acknowledgement

The authors would like to express his thanks to Mr. Pham Thanh Tuan for suggesting the problem and useful advice during the preparation of this work.

REFERENCES

[1] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*, American Mathematical Society, 2000.

[2] T. Đ. Long, N. Đ. Sang, H. Q. Toàn, *Giáo trình giải tích*, Tập 1, NXB ĐHQGHN, 2004.

[3] I. Niven, *A simple proof that π is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (6) (1947), 509.

[4] J. Popken, *On Lambert's proof for the irrationality of π*, Indagationes Math. **2** (1940), 279-281.

[5] J. Popken, *Over de onmeetbaarheid van π*, Euclides **17** (1941), 217-227.

[6] T.-L. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu, *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*, Springer, 2009.

ĐỊNH LÝ STEWART

Nguyễn Trịnh Tam - K46A SPTTA
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. *Bài báo trình bày về định lý Stewart và một số ứng dụng vào việc xây dựng công thức tính độ dài một số đại lượng đặc biệt của một tam giác trong hình học phẳng.*

1. MỞ ĐẦU

Trong hình học phẳng, định lý Stewart mô tả về một đẳng thức miêu tả mối quan hệ độ dài giữa các cạnh trong tam giác với đoạn thẳng nối một đỉnh tới một điểm nằm trên cạnh đối diện của tam giác. Định lý được toán học người Scotland, Matthew Stewart công bố năm 1746 khi ông là ứng cử viên để thay thế Colin Maclaurin làm Giáo sư Toán học tại Đại học Edinburgh, xem [2]. Trong [3], Coxeter và Greitzer cho rằng kết quả này có lẽ đã được Archimedes biết đến vào khoảng năm 300 TCN. Tuy nhiên, đến hiện tại hầu hết mọi người tin rằng kết quả này được công bố đầu tiên bởi Stewart. Khẳng định của định lý là một trong những khẳng định rất đẹp của toán học. Tính linh hoạt của định lý sẽ giúp chúng ta vận dụng trong việc giải các bài toán hình học khác nhau. Điều này nói lên rằng Định lý Stewart sẽ có có vai trò lớn và thú vị trong giải các bài toán hình học phẳng.

Nhà toán học người Scotland, Matthew Stewart (1717–1785) (nguồn: Wikipedia).

Sau đây, chúng tôi giới thiệu sơ lược về cấu trúc của bài báo:

1. Phần đầu của bài báo, chúng tôi nhắc lại ngắn gọn lý thuyết của việc định hướng trên đường thẳng. Trên cơ sở các đường thẳng và đoạn thẳng định hướng (độ dài đại số

của đường thẳng), chúng tôi phát biểu và chứng minh Định lý Stewart trong bối cảnh của các đoạn thẳng định hướng.

2. Phần tiếp theo, chúng tôi đưa ra một số áp dụng của Định lý Stewart vào việc thiết lập công thức tính độ của đường trung tuyến, đường phân giác trong, đường phân giác ngoài của một tam giác. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra một số minh họa cho việc áp dụng Định lý Stewart để xây dựng mối liên hệ của một số đại lượng đặc biệt của tam giác trong hình học phẳng.

2. ĐƯỜNG THẲNG ĐỊNH HƯỚNG

Trong toàn bộ bài báo này, mỗi đường thẳng luôn luôn được hiểu là một đường thẳng đã được định hướng. Hơn nữa, chúng tôi luôn luôn cố định chiều dương là chiều từ trái qua phải và chiều âm ngược lại. Nội dung trong mục này, chúng tôi chủ yếu tham khảo từ hai tài liệu [1] và [5].

Định nghĩa 2.1. Cho đường thẳng d, điểm $O \in d$ bất kì và đặt trên d véc tơ đơn vị $\overrightarrow{e}$ gốc O khác không. Khi đó đường thẳng d được gọi là trục gốc O, định hướng bởi véc tơ $\overrightarrow{e}$. Qui ước: chiều xác định của véc tơ $\overrightarrow{e}$ là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.

Cho trục d gốc O, định hướng bởi véc tơ $\overrightarrow{e}$ và M là điểm bất kì trên d. Khi đó tồn tại duy nhất số x_M sao cho

$$\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{e}.$$

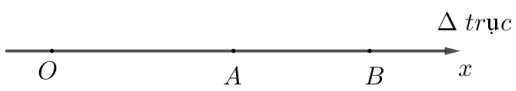
Số x_M gọi là tọa độ của M đối với trục d, kí hiệu $M = (x_M)$. Khi đó, với mọi điểm $M = (x_M), N = (x_N)$ đối với trục d, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_n - x_M)\overrightarrow{e}.$$

Số $x_N - x_M$ được gọi là tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{MN}$ đối với trục d. Hơn nữa, số $x_N - x_M$ có tính chất:

- Có giá trị tuyệt đối là độ dài của véc tơ $\overrightarrow{MN}$;
- Xác định chính xác chiều của véc tơ $\overrightarrow{MN}$ theo véc tơ đã cho $\overrightarrow{e}$.

Vì vậy, người ta còn gọi số $x_N - x_M$ là **độ dài đại số của đoạn thẳng** MN theo trục d, kí hiệu là $\overline{MN}$. Như vậy, độ dài đại số của đoạn thẳng được xác định như sau:



$$\overline{AB} = \begin{cases} AB & \text{nếu } \overrightarrow{AB} \text{ cùng chiều dương,} \\ -AB & \text{nếu } \overrightarrow{AB} \text{ ngược chiều dương.} \end{cases}$$

Từ những tính chất của phép cộng các véc tơ mà chúng ta đã biết, chúng ta thu được kết quả sau:

Định lý 2.1 (Hệ thức Schwartz). *Cho trục d gốc O, định hướng bởi véc tơ $\overrightarrow{e}$ và M, N, P là các điểm bất kì trên d. Khi đó ta có hệ thức:*

$$\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}.$$

Chứng minh. Chứng minh của định lý này chúng tôi sẽ để dành cho bạn đọc. □

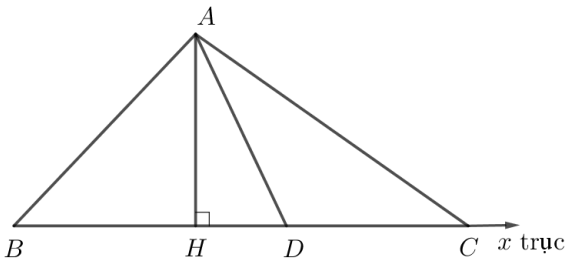
Chú ý. Việc thực các phép toán trên độ dài đại số cần thiết phải thực hiện trên các độ dài đại số được xác định bởi một trục. Ngược lại, nó sẽ dẫn đến một vài suy luận sai trên các phép toán.

3. ĐỊNH LÝ STEWART

3.1. Nội dung định lý

Định lý 3.1. *Cho tam giác ABC bất kì trong mặt phẳng và D là điểm trên cạnh BC. Khi đó, bởi cố định một định hướng trên đường thẳng BC, ta có*

$$AD^2 \cdot \overline{BC} + AB^2 \cdot \overline{CD} + AC^2 \cdot \overline{DB} + \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DB} = 0. \tag{1}$$



Chứng minh.

Từ điểm A hạ $AH \perp BC$. Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng điểm H, trục Ox trùng với BC và trục Oy trùng với HA. Khi đó ta xác định được tọa độ các điểm sau:

$$H(0;0); B(b,0); C(c,0); D(d,0); A(0,a).$$

Áp dụng Định lý Pitago, ta thu được

$$\begin{aligned} AB^2 &= a^2 + b^2; & \overline{BC} &= c - b; \\ AC^2 &= a^2 + c^2; & \overline{CD} &= d - c; \\ AD^2 &= a^2 + d^2; & \overline{DB} &= b - d. \end{aligned}$$

Thay vào vế trái của (1) ta được

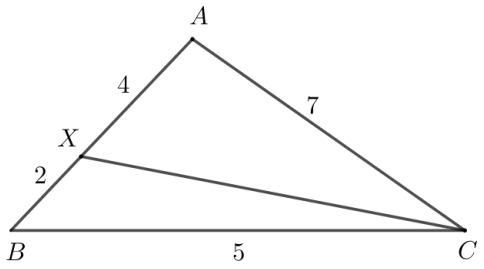
$$\left(a^2 + d^2\right)(c - b) + \left(a^2 + b^2\right)(d - c) + \left(a^2 + c^2\right)(b - d) + (c - b)(d - c)(b - d) = 0.$$

Do đó, chúng ta thu được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.1. Cho ΔABC là tam giác trong mặt phẳng có $AC = 7, BC = 5$. Lấy X là điểm thuộc AB sao cho $AB = 2BX = 4$. Tính CX.

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có $AB = 2BX = 4$. Do đó, ta được

$$BX = 2; AB = 6.$$



Áp dụng định lý Stewart, ta có

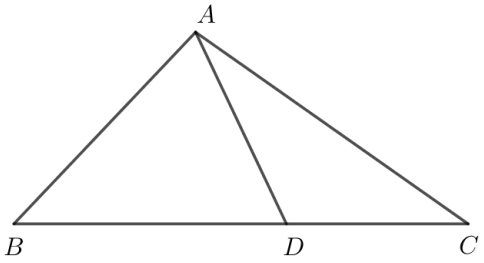
$$6 \cdot CX^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 5^2.$$

Do đó ta thu được, $CX^2 = 33$. Vì vậy, $CX = \sqrt{33} \approx 5,74$. □

3.2. Một số trường hợp đặc biệt của Định lý Stewart

Trong mục này, chúng tôi xét các trường hợp cụ thể về vị trí tương đối của điểm D với hai điểm B và C.

3.2.1. Trường hợp 1: D nằm giữa B và C.



Trường hợp này, ta có

$$\overline{BC} = BC, \overline{CD} = -CD, \text{ và } \overline{DB} = -DB.$$

Thay vào biểu thức (1) ta thu được

$$AD^2 \cdot BC - AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB + BC \cdot CD \cdot DB = 0.$$

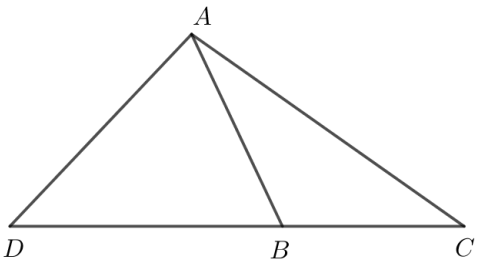
Vì vậy, ta có

$$AD^2 = \frac{AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB}{BC} - CD \cdot DB.$$

Ta thu được công thức tính độ dài AD như sau

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB}{BC} - CD \cdot DB}. \quad (2)$$

3.2.2. Trường hợp 2: B nằm giữa C và D.



Trường hợp này ta có $\overline{BC} = BC, \overline{CD} = -CD$, và $\overline{DB} = DB$. Thay vào biểu thức (1), ta thu được

$$AD^2 \cdot BC - AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB - BC \cdot CD \cdot DB = 0.$$

Do đó, đẳng thức trên kéo theo

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB + BC \cdot CD \cdot DB.$$

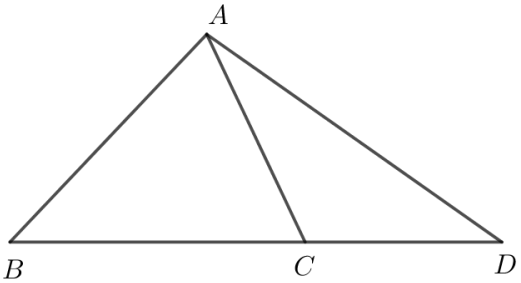
Vì vậy, ta sẽ tìm được

$$AD^2 = \frac{AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB}{BC} + CD \cdot DB.$$

Vì vậy, ta có công thức sau

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB}{BC} + CD \cdot DB}. \tag{3}$$

3.2.3. Trường hợp 3: C nằm giữa B và D.



Trường hợp này ta có $\overline{BC} = BC, \overline{CD} = CD$, và $\overline{DB} = -DB$. Thay vào biểu thức (1), ta thu được

$$AD^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB + BC \cdot CD \cdot DB = 0,$$

$$AD^2 = \frac{AC^2 \cdot DB - AB^2 \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DB}{BC}.$$

Do đó, ta sẽ tìm được

$$AD^2 = \frac{AC^2 \cdot DB - AB^2 \cdot CD}{BC} + CD \cdot DB.$$

Vì vậy,

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB}{BC} + CD \cdot DB}. \tag{4}$$

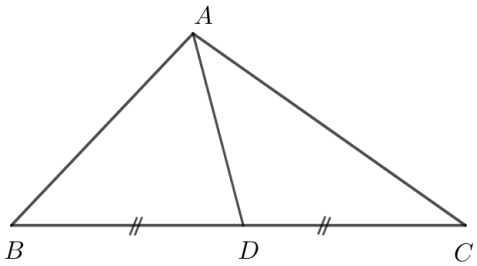
3.3. Một số ứng dụng của định lý Stewart

Ứng dụng đầu tiên của Định lý Stewart bởi việc xây dựng công thức tính độ dài đường trung tuyến của một tam giác. Công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác còn được biết đến là định lý Apollonius.

Bài toán 1 (Tính độ dài đường trung tuyến)**.** Cho tam giác ΔABC có D là trung điểm cạnh BC từ đó AD là đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng độ dài đường trung tuyến đó theo công thức sau

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}}. \tag{5}$$

Chứng minh.

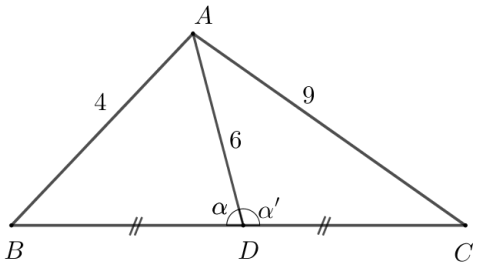


Xét AD là đường trung tuyến của ΔABC với D là trung điểm BC. Do vậy $BD = DC = \frac{BC}{2}$. Khi đó, thay vào (3) ta thu được

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}}.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

Ví dụ 3.2. Cho tam giác ΔABC có hai cạnh có độ dài lần lượt là 4 và 9. Đường trung tuyến của tam giác ABC đến cạnh thứ ba có độ dài là 6. Hãy xác định độ dài cạnh thứ ba của tam giác ABC.



Lời giải. Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến (5) trong tam giác ΔABC ta thu được rằng

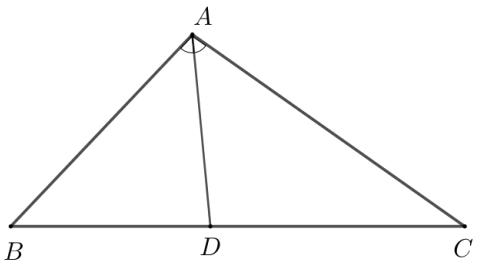
$$AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}.$$

Do đó, ta thu được $BC^2 = 50$. Vì vậy độ dài cạnh thứ ba của tam giác ABC đã cho là $2\sqrt{5}$.

Ví dụ 3.3. Cho ΔABC là một tam giác trong mặt phẳng bất kì. Gọi AD là đường trung tuyến tới cạnh BC của tam giác ΔABC. Chứng minh rằng

$$AB^2 + AC^2 = 2\left(AD^2 + BD^2\right).$$

Chứng minh.



Áp dụng định lý Stewart cho ΔABC cùng với điểm D nằm giữa B và C, khi đó biểu thức (2) trở thành

$$AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta được

$$4AD^2 + 4BD^2 = 2AB^2 + 2AC^2.$$

Vì vậy, bởi chia cả hai vế phương trình cho 2 ta sẽ thu được

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

Trong bài báo [4], các tác giả cung cấp một số phương pháp xây dựng công thức tính độ dài phân giác trong của tam giác khá kỹ thuật. Tiếp theo, chúng tôi sẽ dùng Định lý Stewart để thiết lập một cách đơn giản công thức tính độ dài phân giác trong của tam giác.

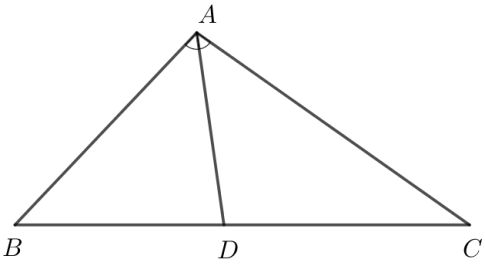
Bài toán 2 (Tính độ dài đường phân giác trong)**.** Cho tam giác ΔABC có AD là đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng đường phân giác trong AD được tính theo công thức

$$AD = \sqrt{AC \cdot AB\left(1 - \frac{BC^2}{(AC + AB)^2}\right)}. \tag{6}$$

Chứng minh.

Theo giả thiết AD là đường phân giác trong ΔABC. Xét định hướng trên BC chiều dương từ $B \to C$, áp dụng Định lý Stewart cho trường hợp D nằm trong B và C, nên từ Công thức (2) ta thu được

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot DB}{BC} - CD \cdot DB}. \tag{1}$$



Vì AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$ của ΔABC nên ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ theo tính chất phân giác. Điều này suy ra

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}.$$

Do vậy, ta được

$$DB = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC}; \quad DC = \frac{AC \cdot BC}{AB + AC}. \tag{7}$$

Thay độ dài BD, CD theo các cạnh AB, AC, BC vào biểu thức (1), ta có

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{\frac{AB^2 \cdot \frac{AC \cdot BC}{AB+AC} + AC^2 \cdot \frac{AB \cdot BC}{AB+AC}}{BC} - \frac{AC \cdot BC^2 \cdot AB}{(AB + AC)^2}} \\ &= \sqrt{AB \cdot AC - \frac{AB \cdot AC \cdot BC^2}{(AB + AC)^2}}. \end{aligned}$$

Vậy công thức độ dài đường phân giác trong thu được là

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC \left(1 - \frac{BC^2}{(AB + AC)^2}\right)}$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.4. Cho tam giác ΔABC có hai cạnh có độ dài lần lượt là a và b. Đường phân giác trong của tam giác ABC đến cạnh thứ ba có độ dài là c. Hãy xác định độ dài cạnh thứ ba của tam giác ABC theo a, b, c.

Lời giải. Theo giả thiết AD là đường phân giác trong ΔABC và AD có độ dài là c, AB và AC có độ dài lần lượt là a, b. Áp dụng Bài toán 2, ta có độ dài đường phân giác trong

$$AD = \sqrt{AC \cdot AB \left(1 - \frac{BC^2}{(AC + AB)^2}\right)}.$$

Điều này suy ra

$$c = \sqrt{a \cdot b \left(1 - \frac{BC^2}{(a + b)^2}\right)}.$$

Do đó, ta có

$$BC^2 = (a + b)^2 - \frac{c^2(a + b)^2}{ab}.$$

Vậy độ dài cạnh thứ ba của ΔABC là

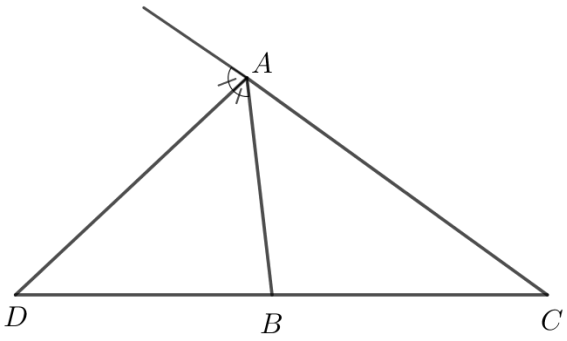
$$BC = \sqrt{(a+b)^2 - \frac{c^2(a+b)^2}{ab}}.$$

Trong một bối cảnh khác, một phương pháp xây dựng công thức tính độ dài phân giác ngoài của tam giác được xây dựng khá kỹ thuật (xem Nhận xét [4, Remark 1, trang 5]). Tiếp theo, chúng tôi sẽ dùng Định lý Stewart để thiết lập một cách đơn giản công thức tính độ dài phân giác này.

Bài toán 3 (Tính độ dài đường phân giác ngoài)**.** Cho tam giác ΔABC có AD là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ và AD cắt BC tại D. Chứng minh rằng đường phân giác ngoài AD được tính theo công thức

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC \cdot \left[\frac{BC^2}{(AC-AB)^2} - 1\right]}. \tag{8}$$

Chứng minh.



Theo giả thiết AD là đường phân giác ngoài của ΔABC. Bởi xét định hướng trên BC chiều dương từ $B \to C$ và áp dụng Định lý Stewart đối với trường hợp B nằm giữa D và C, ta thu được

$$AD = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot CD - AC^2 \cdot DB}{BC} + CD \cdot DB}. \tag{9}$$

Vì AD là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh A nên theo tính chất phân giác ngoài, ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Từ đẳng thức trên kết hợp với tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta suy ra

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DC - DB}{AC - AB} = \frac{BC}{AC - AB}.$$

Do vậy

$$BD = \frac{AB \cdot BC}{AC - AB}, \quad CD = \frac{AC \cdot BC}{AC - AB}.$$

Thay độ dài BD, CD theo các cạnh AB, AC, BC vào biểu thức (9), ta có

$$AD = \sqrt{\frac{\frac{AB^2 \cdot AC \cdot BC}{AC - AB} - \frac{AC^2 \cdot AB \cdot BC}{AC - AB}}{BC} + \frac{AB \cdot AC \cdot BC^2}{AC - AB}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta được

$$AD = \sqrt{-AB \cdot AC + \frac{AB \cdot AC \cdot BC^2}{AC - AB}}.$$

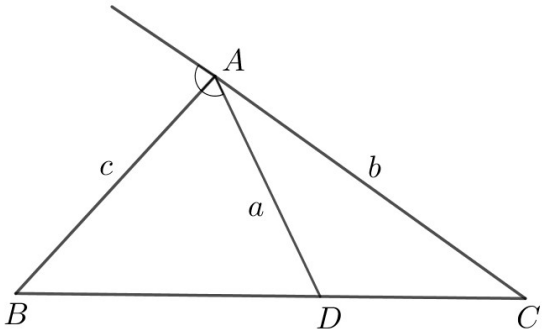
Vì vậy,

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC \cdot \left[\frac{BC^2}{(AC - AB)^2} - 1\right]}.$$

Ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.5. Cho tam giác ΔABC có hai cạnh có độ dài lần lượt là a và b. Đường phân giác ngoài của tam giác ABC đến cạnh thứ ba có độ dài là c. Hãy xác định độ dài cạnh thứ ba của tam giác ABC theo a, b, c.

Lời giải.



Theo giả thiết AD là đường phân giác ngoài của ΔABC đến cạnh thứ ba có độ dài là c, AB và AC có độ dài lần lượt là a và b. Áp dụng Bài toán 3 ta có độ dài đường phân giác ngoài thu được là

$$AD = \sqrt{AC \cdot AB \cdot \left[\frac{BC^2}{(AC - AB)^2} - 1\right]}.$$

Từ đây, ta thu được đẳng thức sau

$$c = \sqrt{a \cdot b \cdot \left[\frac{BC^2}{(b - a)^2} - 1\right]}.$$

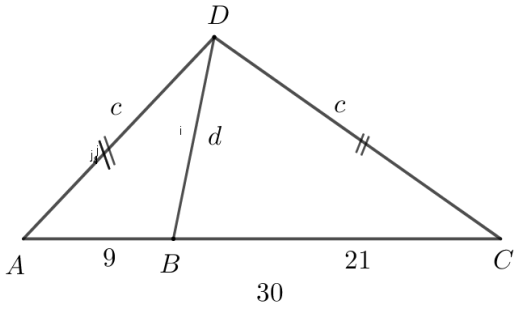
Điều này suy ra

$$BC^2 = \frac{c^2 + ab}{ab} \cdot (b - a)^2.$$

Vậy độ dài cạnh thứ ba của ΔABC là

$$BC = \sqrt{\frac{c^2 + ab}{ab} \cdot (b - a)^2}.$$

Bài toán 4. Giả sử B là điểm trên đường thẳng AC sao cho $AB = 9$ và $BC = 21$. Lấy D là một điểm không thuộc đường thẳng AC sao cho $AD = CD$ và AD, BD là các số nguyên. Hãy xác định tổng chu vi có thể có của ΔACD.



Lời giải. Từ điều kiện đề bài cho ta sẽ đặt

$$AD = c, BD = d,$$

trong đó c, d là các số nguyên. Áp dụng định lý Stewart đối với trường hợp B nằm giữa A và C, ta thu được

$$30d^2 + 21 \cdot 9 \cdot 30 = 9c^2 + 21c^2.$$

Do đó, $c^2 - d^2 = 189$. Vì vậy,

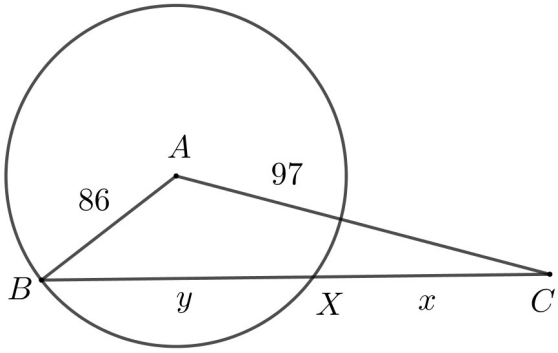
$$(c - d)(c + d) = 189.$$

Theo giả thiết, các số c, d đều là nguyên nên $c-d, c+d$ phải là ước nguyên dương (do $c > d$) của 189. Mặt khác, các cặp ước nguyên dương của 189 là $(1; 189), (3; 63), (7; 27)$, và $(9; 21)$. Vì vậy, có 3 cặp số (c, d) thỏa mãn là $(95; 94), (33; 30), (17; 10)$. Điều này chứng tỏ tổng chu vi có thể có của ΔACD là

$$\begin{aligned} &3AC + 2(c_1 + c_2 + c_3) \\ &\quad = 90 + 2 \cdot (95 + 33 + 17) = 380. \end{aligned}$$

Cuối cùng, chúng tôi xét hai ứng dụng của Định lý Stewart vào giải các bài toán liên quan đến tính độ dài trong hình học phẳng.

Bài toán 5. Cho tam giác ΔABC có $AB = 86$ và $AC = 97$. Đường tròn tâm A, bán kính AB cắt đường thẳng BC tại hai điểm B và X. Giả sử các đoạn thẳng BX, CX có độ dài là các số nguyên. Hãy xác định độ dài của BC.



Lời giải. Đặt $CX = x, BX = y$, trong đó x, y là các số nguyên dương. Vì đường tròn (A, AB) đi qua B và X nên ta có $AB = AX = 86$. Áp dụng định lý Stewart đối với trường hợp X nằm giữa A và C, ta thu được

$$xy(x+y) + 86^2(x+y) = 97^2 y + 86^2 x.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} 2x^2y + xy^2 + 86^2x + 86^2y &= 97y^2 + 86^2x \\ x^2yxy^2 + 86^2y &= 97^2y \\ x^2 + xy + 86^2 &= 97^2 \quad (y \neq 0) \\ x(x+y) &= (97-86)(97+86) \\ x(x+y) &= 2013. \end{aligned}$$

Mặt khác, các thừa số nguyên tố của 2013 là $3, 11, 61$. Vì $x < x+y$ và $BC < AB + AC$ theo bất đẳng thức tam giác ta thu được $x+y < 183$. Do đó, x phải bằng 33. Vì vậy ta tính được $x + y = 61$ hay độ dài đoạn thẳng BC là 61.

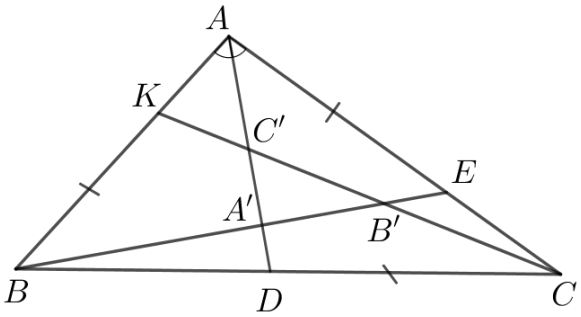
Bài toán 6. Cho tam giác ΔABC. Với mỗi số $\lambda \geq 1$ các đường thẳng AD, BE, CK (trong đó D, E, K tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB) được gọi là các đường n-tuyến của ΔABC nếu

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{AK}{AB} = \frac{1}{n}.$$

Đặt $AD = d_a, BE = d_b, CK = d_c$ (và gọi d_a, d_b, d_c là độ dài của các đường n-tuyến). Chứng minh rằng

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Lời giải.



Ta đặt $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Áp dụng định lý Stewart, ta có

$$a \cdot AD^2 = BD \cdot b^2 - DC \cdot c^2 - a \cdot BD \cdot DC. \tag{10}$$

Vì theo giả thiết $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{n}$ nên $BD = \frac{a}{n}$ và

$$DC = BC - BD = a - \frac{a}{n} = \frac{(n-1)a}{n}.$$

Thay BD và DC vừa tính vào biểu thức (1), ta được

$$a \cdot AD^2 = \frac{ab^2}{n} + \frac{(n-1)ac^2}{n} - a \cdot \frac{a \cdot (n-1) \cdot a}{n^2}.$$

Do đó, ta có

$$AD^2 = {d_a}^2 = \frac{b^2 + (n-1)c^2}{n} - \frac{(n-1)a^2}{n^2}.$$

Điều này dẫn tới

$${d_a}^2 = \frac{nb^2 + n(n-1)c^2 - (n-1)a^2}{n^2} \tag{11}$$

Lập luận tương tự, ta thu được

$${d_b}^2 = \frac{nc^2 + n(n-1)a^2 - (n-1)b^2}{n^2}, \tag{12}$$

và

$${d_c}^2 = \frac{nb^2 + n(n-1)a^2 - (n-1)c^2}{n^2}. \tag{13}$$

Cộng từng vế (11), (12) và (13), ta suy ra

$${d_a}^2 + {d_b}^2 + {d_c}^2 = \frac{n^2 - n + 1}{n^2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta được điều phải chứng minh.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Phạm Thanh Tâm, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] B. V. Bình, *Hình học sơ cấp, tập 2*, Nhà xuất bản Trường ĐHSP Hà Nội 2 (Tài liệu lưu hành nội bộ), 1993.

[2] C. Hutton, O. Gregory, *A Course of Mathematics*, Vol. II, Longman, Orme & Co, 1843.

[3] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, New Mathematical Library **19**, The Mathematical Association of America, 1967.

[4] I. S. Amarasinghe, *On the standard lengths of Angle Bisectors and Angle Bisector Theorem*, Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, ISSN: 2284-5569, pp. 15-27.

[5] N. V. Vạn, *Hình học sơ cấp, tập 1*, Nhà xuất bản Trường ĐHSP Hà Nội 2 (Tài liệu lưu hành nội bộ), 1993.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

Nguyễn Thị Hồng Thái - K47E SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. *Trong bài báo này, tác giả sẽ trình bày một số phương pháp tính định thức. Trong mục đầu tiên của bài báo, tác giả trình bày một số kiến thức liên quan tới định thức của ma trận vuông. Các phương pháp tính định thức cùng các ví dụ minh họa sẽ được trình bày ở mục còn lại của bài báo.*

1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Định nghĩa 1.1 (xem [5]). Cho n là một số tự nhiên khác 0. Hoán vị (hoặc phép thế) của tập $\{1,\dots,n\}$ là một song ánh từ tập này vào chính nó. Tập hợp tất cả các hoán vị của tập $\{1,\dots,n\}$ được kí hiệu là S_n.

Thông thường, ta kí hiệu một hoán vị $\pi \in S_n$ như sau

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng S_n có $n!$ phần tử.

Định nghĩa 1.2 (xem [5]). Ta gọi cặp $\{i,j\} \subseteq \{1,\dots n\}$ là một nghịch thế của hoán vị π nếu $i-j$ trái dấu với $\pi(i)-\pi(j)$. Hoán vị với số nghịch thế chẵn (lẻ) được gọi là hoán vị chẵn (lẻ). Dấu của π nhận giá trị bằng 1 nếu π là một hoán vị chẵn và bằng -1 nếu π là một hoán vị lẻ và được kí hiệu là $\operatorname{sgn}(\pi)$.

Định nghĩa 1.3 (xem [5]). Cho ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Định thức của ma trận vuông cấp n là tổng đại số của $n!$ số hạng, mỗi số hạng là tích của n phần tử lấy trên các hàng và các cột khác nhau của ma trận A, mỗi tích được nhân với phần tử dấu là $+1$ hoặc -1 theo phép thế tạo bởi các chỉ số hàng và chỉ số cột của các phần tử trong tích. Với S_n là nhóm các hoán vị của n phần tử $1,2,\dots,n$, ta có

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Khi đó, $\det(A)$ cũng được gọi là một định thức cấp n và còn được kí hiệu là $|A|$ hay

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Định thức của ma trận cấp $1, 2, 3$ được xác định như sau.

- Định thức cấp một:

$$\det(a) = a.$$

- Định thức cấp 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Định thức cấp 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_3} \operatorname{sgn}(\pi).a_{\pi(1)1}.(\pi).a_{\pi(2)2}.a_{\pi(3)3},$$

trong đó

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$
$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chú ý rằng π_1, π_2, π_3 là những phép thế chẵn, π_4, π_5, π_6 là những phép thế lẻ. Vì vậy, ta có

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Sau đây là một số tính chất cơ bản của định thức. Về chứng minh chi tiết của những tính chất này, tác giả giới thiệu bạn đọc tới tài liệu tham khảo [5].

Tính chất 1.1. Nếu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} + a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} + a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} + a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

thì ta có $D = D' + D''$ trong đó

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tính chất 1.2. Nếu các thành phần của một cột có thừa số chung k thì có thể đưa k ra ngoài dấu định thức

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & ka_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & ka_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & ka_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tính chất 1.3. Nếu ma trận có hai cột giống nhau thì định thức của nó bằng 0.

Tính chất 1.4. Nếu A, B là hai ma trận cùng cấp thì

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Từ đó, nếu A khả nghịch thì $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Tính chất 1.5. Định thức của ma trận đơn vị bằng 1.

Hệ quả 1.1.

a) Định thức đổi dấu khi đổi chỗ 2 cột (dòng) của nó.

b) Nếu các cột của định thức cấp n coi là những vecto của $\mathbb{K}^n$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính thì định thức bằng không. Nói riêng, nếu định thức có một cột bằng 0 thì nó bằng không.

c) Định thức không thay đổi nếu nhân một cột định thức với một vô hướng thuộc $\mathbb{K}$ rồi cộng vào một cột khác của nó.

Tính chất 1.6. $|A| = |A^T|$.

Việc tính định thức của ma trận bằng định nghĩa nhìn chung sẽ gặp khó khăn vì số số hạng ta phải tính toán là $n!$ là một số rất lớn khi n tăng. Chính vì vậy, chúng ta cần có một số phương pháp hữu dụng để tính định thức.

2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

2.1. Khai triển Laplace

Khai triển Laplace còn được gọi là khai triển phần bù đại số, là một biểu thức cho định thức $|A|$ của một ma trận vuông A theo các định thức con của A.

Phần bù đại số (i, j) của ma trận A là vô hướng A_{ij} xác định bởi $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, trong đó M_{ij} là định thức con của ma trận A tạo ra từ việc xóa hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A. Trong trường hợp này, A_{ij} cũng được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

Khai triển Laplace được phát biểu thông qua định dưới đây. Về chứng minh chi tiết của định lý này, tác giả giới thiệu bạn đọc tới tài liệu tham khảo [5].

Định lý 2.1. *Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cỡ n trên trường $\mathbb{K}$. Khi đó*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \textit{(khai triển theo dòng thứ } i\textit{)}$$

hoặc

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad \textit{(khai triển theo cột thứ } j\textit{)}.$$

Với việc sử dụng khai triển Laplace, ta đưa định thức đã cho về tổng các định thức có cấp nhỏ hơn, dần dần ta đưa được về các định thức cấp nhỏ dễ tính toán, mà sau này ta thường áp dụng luôn công thức. Hãy cùng đến với một số ví dụ sau.

Ví dụ 2.1. Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Khai triển Laplace theo dòng đầu, ta có

$$\det(A) = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} - 1 \cdot A_{13} + m \cdot A_{14},$$

trong đó

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -35, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -45,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 34, \quad A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

Vậy, ta có

$$\det(A) = -35 + 2 \cdot (-45) - 34 + 7m = 7m - 159.$$

Ví dụ 2.2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của định thức ma trận vuông cấp 3 có các phần tử bằng 1 hoặc -1.

Lời giải. Ta biết rằng

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

là tổng của 6 số hạng, trong đó mỗi số hạng đều chỉ bằng 1 hoặc -1. Từ đó, ta suy ra $|A|$ là số nguyên chẵn và

$$-6 \leq |A| \leq 6.$$

Nếu $|A| = 6$ thì ta suy ra

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} = 1 \\ a_{12}a_{23}a_{31} = 1 \\ a_{13}a_{21}a_{32} = 1 \\ a_{13}a_{21}a_{32} = -1 \\ a_{12}a_{21}a_{33} = -1 \\ a_{13}a_{21}a_{32} = -1 \end{cases}.$$

Điều này chứng tỏ

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33}a_{12}a_{23}a_{31}a_{13}a_{21}a_{32} = -1 \\ a_{11}a_{22}a_{33}a_{12}a_{23}a_{31}a_{13}a_{21}a_{32} = 1 \end{cases}.$$

Rõ ràng đây là một điều vô lý, vậy $|A| < 6$. Chứng minh tương tự, ta có $|A| > -6$. Như vậy, ta được

$$-4 \leq |A| \leq 4.$$

Chú ý rằng

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

thỏa mãn

$$|B| = 4 \quad \text{và} \quad |-B| = -4.$$

Vậy giá trị lớn nhất của định thức $A = 4$, giá trị nhỏ nhất của định thức $|A| = -4$.

Nhận xét 2.1. Việc tính định thức của ma trận chỉ dùng khai triển Laplace tuy đã ngắn gọn hơn dùng định nghĩa, nhưng vẫn sẽ rất khó khăn khi gặp những ma trân cỡ lớn. Vì vậy phương pháp này nhìn chung vẫn chỉ phù hợp với ma trận cỡ nhỏ hoặc một vài trường hợp đặc biệt. Khi tính định thức của ma trận, ta thường phải dùng kết hợp phương pháp này như một bước nhỏ trong các phương pháp mà tôi sẽ trình bày ở phần sau.

2.2. Biến đổi sơ cấp đưa về ma trận tam giác

Định nghĩa 2.1. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ xác định trên trường $\mathbb{K}$.

a) Nếu $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$ (mọi phần tử nằm dưới đường chéo chính bằng 0), A được gọi là ma trận tam giác trên.

b) Nếu $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$ (mọi phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 0), A được gọi là ma trận tam giác dưới.

Bằng cách sử dụng khai triển Laplace và quy nạp, ta chứng minh được rằng định thức của ma trận tam giác trên (dưới) bằng tích của các phần tử nằm trên đường chéo chính.

Nhận xét 2.2. Như vậy, ma trận đường chéo là một ma trận rất "đẹp" để tính định thức vì công thức của nó rất ngắn gọn, dễ nhớ. Tuy nhiên không phải lúc nào ma trận cần tính định thức cũng có dạng đẹp như vậy. Trong một số bài toán, ta có thể đưa ma trận đã cho về dạng tam giác trên (dưới) bằng các phép biến đổi sơ cấp phù hợp.

Ví dụ 2.3. Tính định thức của ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$, biết

$$a_{ij} = \min(i, j).$$

Lời giải. Ta nhân dòng 1 với -1 rồi cộng dòng 2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Ta nhân tổng của dòng 1 và dòng 2 với -1 rồi cộng vào dòng 3, ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Tiếp tục lặp lại bước trên với các dòng $4, 5, \dots, n$. Đến bước cuối cùng, ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.1.\dots.1 = 1 \quad \text{(ma trận tam giác trên)}.$$

Ví dụ 2.4 (Đề chọn đội tuyển DHSP Hà Nội 2 môn Đại số, năm 2018)**.** Tính định thức của ma trận $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ ($M(n, \mathbb{R})$ là tập các ma trận vuông cấp n với các phần tử trên trường số thực $\mathbb{R}$), biết $a_{ij} = \max(i, j)$.

Lời giải. Từ định nghĩa của ma trân A, ta thấy rằng

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ nhất với -1 rồi cộng vào các dòng còn lại, ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lúc này đã xuất hiện rất nhiều số 0 trong định thức, tuy nhiên ma trận trong định thức vẫn chưa là ma trận chéo. Ta tiếp tục khai triểm Laplace theo cột cuối, ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \vdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot n.$$

Ví dụ 2.5. Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Lần lượt ta nhân dòng thứ i với -1 rồi cộng và dòng thứ $i+1$ với $i = n-1, \dots, 1$, ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^n \cdots (-1)^3 n = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3} n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n.$$

2.3. Phương pháp truy hồi

Cho định thức D_n có dạng

$$D_n = \begin{vmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

là định thức của ma trận vuông cấp n trên trường số thực. Đối với dạng định thức này, ta có phương pháp sau.

Bước 1: Khai triển Laplace theo cột thứ nhất, ta được

$$D_n = b \cdot D_{n-1} - a \cdot c \cdot D_{n-2} = p \cdot D_{n-1} + q \cdot D_{n-2},$$

ở đây $p = b$, $q = -a \cdot c$; D_{n-1}, D_{n-2} là định thức của các ma trận có dạng giống D_n, nhưng có cấp lần lượt là $n-1$ và $n-2$.

Như vậy ta đưa bài toán tính định thức về bài toán tìm công thức dãy số với công thức truy hồi

$$\begin{cases} D_1 = b, \ D_2 = b^2 - ac, \\ D_n = p \cdot D_{n-1} + q \cdot D_{n-2}. \end{cases}$$

Bước 2: Giải phương trình sai phân: $x^2 - px - q = 0$. (*)

Bước 3: Với các trường hợp nghiệm của phươmg trình (*), ta có các trường hợp sau.

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 , khi đó D_n có dạng

$$D_n = \frac{D_2 - x_2 D_1}{x_1(x_1 - x_2)} x_1^n - \frac{D_2 - x_1 D_1}{x_2(x_1 - x_2)} x_2^n.$$

Thật vậy, với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - px - q = 0$, áp dụng định lý Viete, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p, \\ x_1 x_2 = -q, \end{cases}$$

nên $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} = (x_1 + x_2)D_{n-1} - x_1 x_2 D_{n-2}$, ta được

$$\begin{cases} D_n - x_2 D_{n-1} = x_1(D_{n-1} - x_2 D_{n-2}) = \dots = x_1^{n-2}(D_2 - x_2 D_1), \\ D_n - x_1 D_{n-1} = x_2(D_{n-1} - x_1 D_{n-2}) = \dots = x_2^{n-2}(D_2 - x_1 D_1). \end{cases}$$

Nhân x_1 vào hai vế đẳng thức đầu, nhân x_2 vào hai vế đẳng thức sau, rồi trừ theo vế, ta được đẳng thức cần chứng minh.

Trường hợp 2: Phương trình (*) có nghiệm kép $x_1 = x_2$, khi đó

$$D_n = (n-1)x_1^{n-2}D_2 - (n-2)x_1^{n-1}D_1.$$

Thật vậy, nếu $x_1 = x_2$ thì từ trên, ta có

$$D_n - x_1D_{n-1} = x_1(D_{n-1} - x_1D_{n-2}) = \ldots = x_1^{n-2}(D_2 - x_1D_1)$$

Đặt $A = D_2 - x_1D_1$ và thay n bởi $n-1$ trong đẳng thức trên, ta được

$$D_n = x_1D_{n-1} + x_1^{n-2}A, \quad D_{n-1} = x_1D_{n-2} + x_1^{n-3}A.$$

Từ đây, ta được

$$D_n = x_1^2D_{n-2} + 2x_1^{n-2}A.$$

Tiếp tục quá trình này, cuối cùng ta có

$$D_n = (n-1)x_1^{n-2}D_2 - (n-2)x_1^{n-1}D_1.$$

Ví dụ 2.6 (Câu 1 đề thi Olympic Toán Sinh viên-Học sinh toàn quốc, môn Đại số bảng A. năm 2017)**.** Cho dãy số (x_n) xác định như sau

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Tính x_n, từ đó suy ra với mọi $n > 0, x_n + 1$ là số tự nhiên và là lũy thừa của 2.

Lời giải. Áp dụng khai triển Laplace theo cột 1, ta suy ra

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

Khi đó, phương trình sai phân của dãy số (x_n) là

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Phương trình này có 2 nghiệm phân biệt là 1 và 2. Với $x_1 = 3, x_2 = 7$, ta có

$$x_n = \frac{7 - 2\cdot 3}{1\cdot(1-2)}\cdot 1^n - \frac{7 - 1\cdot 3}{2\cdot(1-2)}\cdot 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Vậy $x_n = 2^{n+1} - 1$. Điều này suy ra $x_n + 1 = 2^{n+1}$ là lũy thừa của 2.

Ví dụ 2.7. Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Lời giải. Áp dụng khai triển Laplace theo cột 1, ta suy ra

$$D_n = 4D_{n-1} - 2\cdot 2\cdot D_{n-2} = 4D_{n-1} - 4D_{n-2},$$

Áp dụng công thức truy hồi, ta có

$$\begin{cases} D_1 = 4, \quad D_2 = 12 \\ D_n = 4\cdot D_{n-1} - 4\cdot D_{n-2} \end{cases}.$$

Phương trình sai phân của dãy số này là $x^2 - 4x + 4 = 0$, có hai nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$. Từ đó, ta thu được công thức

$$\begin{aligned} D_n &= (n-1)x_1^{n-2}D_2 - (n-2)x_1^{n-1}D_1. \\ &= (n-1)\cdot 2^{n-2}\cdot 12 - (n-2)\cdot 2^{n-1}\cdot 4 \\ &= 2^n\cdot(n+1). \end{aligned}$$

Dạng định thức đưa về truy hồi bậc hai vừa rồi là một trong những dạng định thức thường xuyên xuất hiện trong các đề thi Olympic cũng như đề dự tuyển các năm. Ngoài ra còn có rất nhiều dạng định thức khác mà ta có thể tính bằng phương pháp truy hồi, chúng ta cùng đến với ví dụ sau.

Ví dụ 2.8. Cho m, n, p là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn $m > n + p$, tính định thức

$$\begin{vmatrix} C_m^p & C_m^{p+1} & \dots & C_m^{p+n} \\ C_{m+1}^p & C_{m+1}^{p+1} & \dots & C_{m+1}^{p+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m+n}^p & C_{m+n}^{p+1} & \dots & C_{m+n}^{p+n} \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Áp dụng công thức $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, ta có

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{m}{p}C_{m-1}^{p-1} & \frac{m}{p+1}C_m^p & \dots & \frac{m}{p+n}C_{m-1}^{p+n-1} \\ \frac{m+1}{p}C_m^{p-1} & \frac{m+1}{p}C_m^p & \dots & \frac{m+1}{p+n}C_m^{p+n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{m+n}{p}C_{m+n-1}^{p-1} & \frac{m+n}{p+1}C_{m+n-1}^p & \dots & \frac{m+n}{p+n}C_{m+n-1}^{p+n-1} \end{vmatrix}.$$

Rút m từ hàng 1, $m+1$ từ hàng $2,\ldots,m+n$ từ hàng $n+1$, rút $\frac{1}{p}$ từ cột 1, $\frac{1}{p+1}$ từ cột $2,\ldots,\frac{1}{p+n}$ từ cột $n+1$, ta được

$$D_{n+1}=\frac{m\cdot(n+1)\cdots(m+n)}{p\cdot(p+1)\cdots(p+n)}\cdot\begin{vmatrix} C_{m-1}^{p-1} & C_{m-1}^{p} & \ldots & C_{m-1}^{p+n-1}\\ C_{m}^{p-1} & C_{m}^{p} & \ldots & C_{m}^{p+n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ C_{m+n-1}^{p-1} & C_{m+n-1}^{p} & \ldots & C_{m+n-1}^{p+n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{C_{m+n}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}}\cdot\begin{vmatrix} C_{m-1}^{p-1} & C_{m-1}^{p} & \ldots & C_{m-1}^{p+n-1}\\ C_{m}^{p-1} & C_{m}^{p} & \ldots & C_{m}^{p+n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ C_{m+n-1}^{p-1} & C_{m+n-1}^{p} & \ldots & C_{m+n-1}^{p+n-1}\end{vmatrix}.$$

Lặp lại tiến trình trên $p-1$ lần ta có

$$D_{n+1}=\frac{C_{m+n}^{n+1}\cdot C_{m+n-1}^{n+1}\cdots C_{m+n-p+1}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}\cdot C_{p+n-1}^{n+1}\cdots C_{n+1}^{n+1}}\cdot\begin{vmatrix} C_{m-p}^{0} & C_{m-p}^{1} & \ldots & C_{m-p}^{n}\\ C_{m-p+1}^{0} & C_{m-p+1}^{1} & \ldots & C_{m-p+1}^{n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ C_{m-p+n}^{0} & C_{m-p+n}^{1} & \ldots & C_{m-p+n}^{n}\end{vmatrix}.$$

Đặt $D'=\begin{vmatrix} C_{m-p}^{0} & C_{m-p}^{1} & \ldots & C_{m-p}^{n}\\ C_{m-p+1}^{0} & C_{m-p+1}^{1} & \ldots & C_{m-p+1}^{n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ C_{m-p+n}^{0} & C_{m-p+n}^{1} & \ldots & C_{m-p+n}^{n}\end{vmatrix}$. Lấy cột thứ i trừ đi cột thứ $i-1$ với $i=\overline{2,n+1}$, ta được

$$D'=\begin{vmatrix} C_{m-p}^{0} & C_{m-p}^{1} & \ldots & C_{m-p}^{n}\\ 0 & C_{m-p+1}^{0} & \ldots & C_{m-p+1}^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & C_{m-p+n}^{0} & \ldots & C_{m-p+n}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_{m-p+1}^{0} & \ldots & C_{m-p+1}^{n-1}\\ C_{m-p+2}^{0} & \ldots & C_{m-p+2}^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ C_{m-p+n}^{0} & \ldots & C_{m-p+n}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Đây là một định thức của ma trận vuông cấp n. Lặp lại bước trên $n-1$ lần, ta có

$$D'=\left|C_{m-p+n}^{0}\right|=1.$$

Từ đó suy ra

$$D_{n+1}=\frac{C_{m+n}^{n+1}\cdot C_{m+n-1}^{n+1}\cdots C_{m+n-p+1}^{n+1}}{C_{p+n}^{n+1}\cdot C_{p+n-1}^{n+1}\cdots C_{n+1}^{n+1}}.$$

2.4. Biểu diễn định thức thành tích các định thức

Định lý 2.2. *Cho A,B là hai ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{K}$, khi đó*

$$|AB|=|A|\cdot|B|.$$

Áp dụng định lý trên trong một số trường hợp, ta có thể tách ma trận ban đầu thành tích của hai hay nhiều ma trận mới xuất hiện có định thức đơn giản hơn, khi đó định thức cần tính sẽ bằng tích của các định thức đơn giản. Đối với những ma trận mà ta có thể áp dụng phương pháp này, các phần tử của ma trận cần tính định thức thường dễ dàng phân tích được dưới dạng

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \qquad (**)$$

Chúng ta cùng đến với các ví dụ sau.

Ví dụ 2.9. Tính định thức cấp n $(n \geq 2)$ sau

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Với $n \geq 2$ ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{C}.$$

Bởi vậy, ta được

$$D = \det A = \det B \cdot \det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2, \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{nếu } n = 2. \end{cases}$$

Ví dụ 2.10. Tính

$$D = \begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \dots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \dots & \cos(x_2 - y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \dots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Ta thấy rằng

$$D = \begin{vmatrix} \cos(x_1) & \sin(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \cos(x_2) & \sin(x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \cos(x_3) & \sin(x_3) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(x_n) & \sin(x_n) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(y_1) & \cos(y_2) & \cos(y_3) & \dots & \cos(y_n) \\ \sin(y_1) & \sin(y_2) & \sin(y_3) & \dots & \sin(y_n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Từ đó, ta kết luận được

$$D=\begin{cases}\cos(x_1-y_1) & \text{nếu } n=1,\\ \sin(x_1-x_2)\sin(y_1-y_2) & \text{nếu } n=2,\\ 0 & \text{nếu } n>2.\end{cases}$$

Trong ví dụ trên, ta có

$$c_{ij}=\cos(x_i-y_i)=\cos(x_i)\cos(y_i)+\sin(x_i)\sin(y_i),$$
$$a_{i1}=\cos(x_i),\ a_{i2}=\sin(x_i), b_{2j}=\sin(y_j),\ a_{ik}=0 \text{ với mọi } 3\le k\le n.$$

Ví dụ 2.11. Tính $|C|$ trong đó

$$C=\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n\\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n\end{pmatrix}.$$

Lời giải. Ta viết mỗi phần tử của ma trận C dưới dạng

$$c_{ij}=(a_i+b_j)^n=\sum_{k=0}^{n}a_i^{n-k}(C_n^k b_j^k),$$

rồi tách ma trận A thành tích của hai ma trận như sau

$$C=\begin{pmatrix}a_0^n & a_0^{n-1} & \dots & a_0 & 1\\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1\\ a_2^n & a_2^{n-1} & \dots & a_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_n^n & a_n^{n-1} & \dots & a_n & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}C_n^0b_0^0 & C_n^0b_1^0 & C_n^0b_2^0 & \dots & C_n^0b_n^0\\ C_n^1b_0^1 & C_n^1b_1^1 & C_n^1b_2^1 & \dots & C_n^1b_n^1\\ C_n^2b_0^2 & C_n^2b_1^2 & C_n^2b_2^2 & \dots & C_n^2b_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_n^nb_0^n & C_n^nb_1^n & C_n^nb_2^n & \dots & C_n^nb_n^n\end{pmatrix}.$$

Lấy định thức hai vế, trong đó ở định thức của ma trận thứ hai, từ mỗi dòng thứ k ta rút ra nhân tử C_n^k, ta được

$$|C|=\prod_{k=1}^{n}C_n^k\cdot\begin{vmatrix}a_0^n & a_0^{n-1} & \dots & a_0 & 1\\ a_1^n & a_1^{n-1} & \dots & a_1 & 1\\ a_2^n & a_2^{n-1} & \dots & a_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_n^n & a_n^{n-1} & \dots & a_n & 1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n\\ b_0^2 & b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_0^n & b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n\end{vmatrix}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}C_n^k\cdot C_1C_2,$$

trong đó C_1 là dạng ngược của định thức Vandermode, còn C_2 có dạng định thức Vandermode, vậy

$$|C|=\prod_{k=1}^{n}C_n^k\cdot C_n^k\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\prod_{i>j}(a_i-a_j)\cdot\prod_{i>j}(b_i-b_j),$$

với n lẻ, hoặc

$$|C| = \prod_{k=1}^{n} C_n^k \cdot C_n^k \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \prod_{i>j}(a_i - a_j) \cdot \prod_{i>j}(b_i - b_j),$$

với n chẵn.

Trong ví dụ trên, ta có

$$a_{ik} = a_i^{n-k}, \quad b_{kj} = C_n^k b_j^k \text{ với mọi } 0 \le k \le n.$$

Nhận xét 2.3. Đối với phương pháp này, ta cần chú ý đặc điểm đặc trưng của ma trận trong từng bài toán để phân tích các phần tử của ma trận cho thành một tổng có dạng (**), từ đó đưa ra bước tách định thức phù hợp.

2.5. Phương pháp quy nạp

Cách làm của phương pháp này là ban đầu tính các định thức cỡ nhỏ, sau đó dự đoán công thức tổng quát rồi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 2.12. *Tính định thức*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Ta thấy rằng

$$D_1 = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -x & x \end{vmatrix} = 3x = C_3^2 x,$$

và

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix} = 6x^2 = C_4^2 x^2.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$D_n = C_{n+1}^2 \cdot x^{n-1}.$$

bằng phương pháp quy nạp toán học theo n. Thật vậy, công thức trên đã đúng với $n \le 3$, giả sử công thức trên đã đúng với $n = k$, tức là

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix} = C_{k+1}^2 \cdot x^{k-1}.$$

Khi đó, ta được

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & k+1 \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot D_k + (-1)^{k+2} \cdot (k+1) \begin{vmatrix} -x & x & 0 & \dots & o \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}$$

$$= C_{k+1}^2 \cdot x^k + (-1)^{k+2} \cdot (k+1) \cdot (-1)^k \cdot x^k$$

$$= (C_{k+1}^2 + C_{k+1}^1) x^k$$

$$= C_{k+2}^2 \cdot x^k.$$

Như vậy, theo nguyên lý quy nạp toán học ta có $D_n = C_{n+1}^2 \cdot x^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2.6. Sử dụng tính đa tuyến tính (tách thành tổng các định thức)

Sử dụng tính đa tuyến tính (tính chất 1.2 và tính chất 1.3), ta có thể đưa việc tính một định thức thành tính tổng các định thức đơn giản hơn.

Ví dụ 2.13. Tính định thức

$$D(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Ta tách các dòng của định thức $D(x)$ thành tổng của hai dòng

$$(a_1, \dots, x+a_i, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + (0, \dots, x, \dots 0),$$

thì $D(x)$ được viết thành tổng của các định thức chứa hai dòng như nhau, trừ các trường hợp sau.

- Một định thức mà dòng thứ i có dạng $(0, \dots, x, \dots, 0)$ (x ở vị trí thứ i), $i = 1, \dots, n$ thì đó là định thức $|xE| = x^n$.
- n định thức có đúng một dòng j là $(a_1, .., a_n)$, còn các dòng khác có dạng $(0, \dots, x, \dots, 0)$ (x ở vị trí thứ i). Theo định nghĩa, ta có ngay $D(x) = a_j x^{n-1}$.

Vậy, ta thu được kết quả

$$D(x) = x^n + x^{n-1}(a_1 + \ldots + a_n).$$

Ví dụ 2.14. Tính

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \ldots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & 1 + a_2 + b_2 & \ldots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \ldots & 1 + a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Ta tách D_n thành tổng các định thức mà mỗi cột của chúng là một trong ba loại: cột loại (1) của ma trận đơn vị (chỉ có một vị trí bằng 1, còn lại bằng 0), cột loại (2) có dạng

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}^T,$$

cột loại (3) có dạng

$$\begin{pmatrix} b_i & b_i & \ldots & b_i \end{pmatrix}^T,$$

với $i = \overline{1, n}$. Từ đây, ta thấy rằng có các loại định thức sau.

- Loại 1: Chỉ gồm các cột loại (1), đó chính là $|I_n| = 1$ và chỉ có một định thức loại này.
- Loại 2: Có từ 2 cột loại (2) hay (3) trở lên, định thức bằng 0.
- Loại 3: chỉ có một cột loại (2), còn lại là cột loại (1). Có n định thức loại này, mỗi định thức có dạng cột thứ i loại (2), còn lại là loại (1). Mỗi định thức như vậy có giá trị a_i. Tổng của chúng là $a_1 + \ldots + a_n$.
- Loại 4: chỉ có một cột loại (3), còn lại là cột loại (1). Có n định thức loại này, mỗi định thức có dạng cột thứ i loại (3), còn lại là loại (1). Mỗi định thức như vậy có giá trị b_i. Tổng của chúng là $b_1 + \ldots + b_n$.
- Loại 5: có đúng 1 cột loại (2), một cột loại (3), còn lại là cột loại (1). Đối với một cặp chỉ số $i > j$, ta có
  + Nếu cột loại (2) ở vị trí i, cột loại (3) ở vị trí j thì định thức bằng
  $$a_i b_j - a_j b_j = b_j(a_i - a_j).$$
  + Nếu cột loại (3) ở vị trí i, cột loại (2) ở vị trí j thì định thức bằng
  $$b_i a_j - a_i b_i = b_i(a_j - a_i).$$

Từ đó, ta có

$$D = 1 + \sum_{1 \le i \le n} (a_i + b_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)(b_j - b_i).$$

2.7. Rút các nhân tử tuyến tính

Nếu mỗi phần tử của ma trận vuông A cấp n là một đa thức bậc nhất theo biến x nào đó thì $|A|$ là một đa thức bậc không quá n với biến đó. Do vậy, nếu ta tìm được n đa thức bậc nhất $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ đọc lập tuyến tính sao cho mỗi $f_j(x)$ là một ước của $|A|$ thì ta kết luận $|A|$ là tích $f_1(x) \ldots f_n(x)$ sai khác nhau một nhân tử hằng số.

Ví dụ 2.15. Tính định thức

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & x+1 \end{vmatrix}.$$

Lời giải. Ta thấy chỉ có một tích có bậc đúng bằng $n-1$, vì mỗi số hạng trong định nghĩa của đa thức là một tích $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)}$ đều có thừa số thứ nhất là một hằng số. Thực ra ta thấy chỉ có một tích có bậc đúng bằng n: nó tương ứng với tích của các phần tử trên đường chéo, tức khi π là hoán vị đồng nhất. Do đó bậc đa thức đúng bằng $n-1$ và hệ số đầu là 1.

Mặt khác lần lượt cho $x = 1, 2, \ldots, n-1$, ta nhận được định thức có hai dòng bằng nhau, nên chúng đều bằng 0, tức là

$$D(1) = D(2) = \ldots = D(n-1).$$

Do đó $D(x)$ chia hết cho $x-1, \ldots, x-n+1$. Vậy, ta được

$$D(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n+1).$$

Ví dụ 2.16. Cho x, y, z là số đo ba cạnh của một tam giác (không suy biến) và

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Chứng minh rằng $D < 0$.

Lời giải. Cộng tất cả các cột vào cột đầu, ta thấy

$$D \vdots (x+y+z).$$

Nhân cột 2 cho -1, cột 3 cho -1, cột 4 cho 1 rồi cộng vào cột đầu, ta được

$$D \vdots (x+y-z).$$

Nhân cột 2 cho -1, cột 3 cho 1, cột 4 cho -1 rồi cộng vào cột đầu, ta được

$$D \vdots (x-y+z).$$

Nhân cột 2 cho 1, cột 3 cho -1, cột 4 cho -1 rồi cộng vào cột đầu, ta được

$$D \vdots (-x+y+z).$$

Từ đây, ta kết luận định thức sai khác tích của 4 biểu thức trên là một hằng số. Mặt khác, hệ số của z^4 trong khai triển là 1, trong khi hệ số của z trong tích 4 biểu thức là -1. Do đó, ta có

$$D = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z).$$

Vì x, y, z là số đo ba cạnh của một tam giác (không suy biến) nên theo bất đẳng thức tam giác ta thấy rằng $D < 0$.

Lời kết:

Ngoài những phương pháp tôi đã trình bày ở trên đây, còn rất nhiều phương pháp tính định thức khác như đặt nhân tử chung, sử dụng giá trị riêng,... Nhìn chung, mỗi phương pháp đều có những ưu, nhược điểm riêng. Để giải được các bài toán tính định thức, ta cần phải quan sát, phân tích được đặc trưng của bài toán để vận dụng, kết hợp các phương pháp một cách phù hợp, linh hoạt. Qua bài viết này, tác giả hy vọng có thể cung cấp cho độc giả, đặc biệt là các bạn sinh viên có hứng thú với kỳ thi Olympic Toán sinh viên một số công cụ để giải quyết các bài toán định thức và một số bài toán liên quan.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn ThS. Lê Minh Thuận, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đ. T. Cường, T. L. Nam, D. V. Thông, và V. T. Việt, *Kỷ Yếu Kì thi Olympic Toán sinh viên và học sinh lần thứ 27*, 2019.

[2] P. H. Hải, N. Q. Anh, L. X. Dũng, L. T. Hiếu, T. V. Thành, và D. V. Thông, *Kỷ yếu kỳ thi Olympic Toán sinh viên và học sinh lần thứ 25*, 2017.

[3] L. T. Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.

[4] Đ. M. Triết, Ôn thi Olympic Toán đại số sinh viên Việt Nam toàn tập, Tủ sách Toán học kỳ thú, 2017. https://toanhockithu.wordpress.com/2017/07/11/on-thi-olympic-toan-dai-so-sinh-vien-vn-toan-tap/

[5] N. H. V. Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG Hà Nội, 1999.

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TỰA TUYẾN TÍNH

Đỗ Thu Hiền, Phạm Thị Mai Hương, Hoàng Thị Hải Yến - K46E SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết định tính của các hệ phương trình vi phân là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng trong lý thuyết phương trình vi phân và tích phân, trong đó lý thuyết ổn định của các hệ phương trình vi phân là một trong những tính chất định tính tiêu biểu, có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực kỹ thuật và được quan tâm nghiên cứu trong nhiều thập kỷ trở lại đây. Nghiên cứu tiên phong về lý thuyết ổn định của hệ phương trình vi phân bắt đầu từ những năm cuối thế kỷ XIX bởi Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (6/6/1857-3/11/1918), một nhà toán học, cơ học và vật lí người Nga. Ông được ghi nhận với nhiều phát kiến lớn trong lĩnh vực lý thuyết ổn định của hệ động lực, cũng như nhiều đóng góp quan trọng cho ngành vật lý toán và lý thuyết xác suất. Hướng nghiên cứu chính của ông là sự ổn định của cân bằng chuyển động của hệ thống cơ học, lý thuyết mẫu về sự ổn định của chất lỏng rối đồng dạng, và nghiên cứu các hạt dưới ảnh hưởng của trọng trường. Lý thuyết ổn định theo nghĩa Lyapunov cho các hệ phương trình vi phân cho tới nay vẫn đang phát triển rất sôi động và đã trở thành một chủ đề nghiên cứu thu hút nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Bên cạnh việc phát triển nghiên cứu về lý thuyết định tính cho các lớp hệ phương trình vi phân tổng quát, nhiều nghiên cứu cũng lựa chọn tiếp cận khai thác sâu các tính chất định tính cho các lớp hệ phương trình vi phân cụ thể và xây dựng các tiêu chuẩn đánh giá đại số cho các lớp hệ này, trong đó lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng có dạng $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$ là một trong những lớp hệ được nghiên cứu đầu tiên và thu được nhiều kết quả sâu sắc. Đặc biệt, các tiêu chuẩn ổn định cho lớp hệ này đã được Lyapunov đưa ra dựa trên tính chất của tập phổ $\sigma(A)$ của ma trận A (tham khảo [1]). Trên cơ sở đó, lý thuyết ổn định cho các lớp hệ mở rộng từ hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng cũng được phát triển như tiêu chuẩn cho sự ổn định của lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính không dừng $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ hay sự ổn định cho lớp hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính. Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi tiến hành tìm hiểu tiêu chuẩn ổn định và một số tính chất mở rộng cho lớp hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính dưới đây

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + f(t, \mathbf{x}(t)), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

trong đó giá trị của hàm $f(t, \mathbf{x}(t))$ là "nhỏ" khi giá trị ẩn hàm $\mathbf{x}$ "đủ nhỏ". Một câu hỏi nghiên cứu quan tâm là sự ổn định của hệ phương trình vi phân (1) sẽ phụ thuộc như thế

nào vào hàm $f(t, \mathbf{x}(t))$ và liệu rằng có thể xây dựng được các tiêu chuẩn đại số cho tính ổn định của lớp hệ này như trường hợp hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng. Nội dung bài viết được dựa trên tham khảo các tài liệu [1, 3].

Hình 1. Nhà toán học, vật lý và cơ học A.M. Lyapunov (6/6/1857-3/11/1918).

2. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TỔNG QUÁT

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại từ tài liệu [1] một số kết quả cơ bản về tính ổn định cho hệ phương trình vi phân tổng quát. Cụ thể, chúng ta xét một hệ thống được mô tả bởi hệ phương trình vi phân sau:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

trong đó $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ là hàm vectơ trạng thái của hệ phương trình vi phân (2) và $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là hàm vectơ cho trước. Sau đây, chúng ta nhắc lại từ [2] kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho hệ phương trình vi phân:

Định lý 2.1 ([2], Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm, trang 225)**.** *Xét hệ phương trình vi phân cho bởi*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots x_n). \end{cases} \tag{3}$$

Đặt $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$ *và* $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & \cdots & x_n^0 \end{pmatrix}^\top$*. Khi đó, với mỗi* $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, giả sử rằng*

(i) *Các hàm* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *liên tục trên* $G = \{|t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b\}$ *và do đó, bị chặn trên tập này, tức là tồn tại* $M > 0$ *sao cho* $|f_i(t, \mathbf{x})| \leq M$ *với mọi* $(i = 1, 2, \ldots, n)$*;*

(ii) *Các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo các biến $x_1, x_2, \cdots, x_n$ trên G với hằng số Lipschitz $L > 0$.*

Khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ của hệ phương trình vi phân (3) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0,$$

xác định trong đoạn $[x_0 - h, x_0 + h]$ với

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Trong suốt bài báo này, chúng ta giả thiết rằng hàm $f(t, \mathbf{x}(t))$ thỏa mãn điều kiện sao cho với mọi $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, hệ phương trình vi phân (2) có nghiệm duy nhất xác định trên $[t_0, \infty)$ và đi qua điểm $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Chúng ta ký hiệu nghiệm này bởi $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ hoặc đơn giản là $\mathbf{x}(t)$.

Dễ thấy rằng nếu $\mathbf{x}_0(t)$ là một nghiệm bất kỳ của hệ phương trình vi phân (2) thì bằng phép đổi biến $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)$, chúng ta có thể chuyển hệ (2) về một hệ rút gọn với nghiệm $\mathbf{z}(t) = 0$. Do đó, không mất tính tổng quát, chúng ta thấy rằng sự ổn định của một nghiệm bất kỳ $\mathbf{x}_0(t)$ có thể tương đương với sự ổn định của *nghiệm không*. Sau đây, chúng ta nhắc lại khái niệm về tính ổn định của nghiệm không $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ của hệ phương trình (2).

Định nghĩa 2.1 ([1], trang 115)**.** Nghiệm $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ của hệ phương trình (2) được gọi là

(i) *ổn định* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ sao cho mọi nghiệm $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ với $\|x_0\| < \delta$ sẽ tồn tại trên cả khoảng $[t_0, \infty)$ và thỏa mãn

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon \text{ với mọi } t \geq t_0.$$

Nếu $\delta > 0$ không phụ thuộc t_0 thì nghiệm $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ được gọi là *ổn định đều*.

(ii) *ổn định tiệm cận* nếu nó ổn định và *hút*, tức là với mỗi $t_0 \geq 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0) > 0$ sao cho với mọi nghiệm $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, nếu $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ thì

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = 0.$$

Minh họa cho các khái niệm ổn định và ổn định tiệm cận tham khảo tại Hình 2.

Để ngắn gọn, thay vì nói nghiệm không của hệ phương trình vi phân (2) là ổn định (tương ứng ổn định tiệm cận), chúng ta sẽ nói hệ phương trình vi phân (2) là ổn định (tương ứng ổn định tiệm cận). Tiếp theo, chúng ta nhắc lại một số kết quả định tính cho hệ phương trình vi phân tuyến tính có dạng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

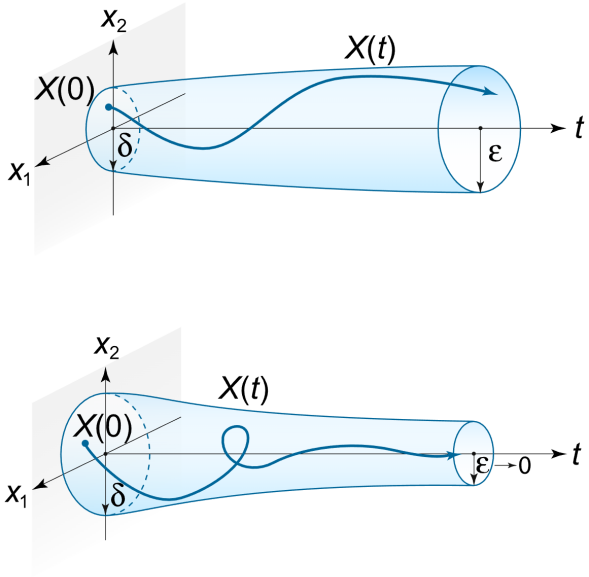
trong đó $A(t)$ là hàm giá trị ma trận liên tục trên $[t_0, \infty)$. Theo điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình tuyến tính, mọi nghiệm của hệ này luôn thác triển duy nhất trên khoảng $[t_0, \infty)$. Giả sử rằng hệ hàm vectơ $\{X^{(1)}(t), \ldots, X^{(n)}(t)\}$ cho bởi

$$X^{(1)}(t) = \Big(x_{11}(t), \ldots, x_{n1}(t)\Big)^\top$$
$$\ldots$$
$$X^{(n)}(t) = \Big(x_{1n}(t), \ldots, x_{nn}(t)\Big)^\top$$

là n nghiệm độc lập tuyến tính của hệ phương trình vi phân (4). Hệ hàm vectơ này được gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình vi phân tuyến tính (4). Khi đó, hàm ma trận $X(t)$ cho bởi

$$X(t) = \Big(X^{(1)}(t) \quad \cdots \quad X^{(n)}(t)\Big) \qquad (\det X(t) \neq 0)$$

được gọi là ma trận nghiệm cơ bản của hệ phương trình vi phân tuyến tính (4).



Hình 2. Minh họa cho các khái niệm ổn định và ổn định tiệm cận. (Nguồn ảnh: [4])

Tiếp theo, chúng ta có định lý sau:

Định lý 2.2 ([1], Định lý 1.1, Chương 4)**.** *Các khẳng định sau đây là đúng:*

(i) *Nghiệm* $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ *của hệ phương trình vi phân tuyến tính (4) là ổn định khi và chỉ khi ma trận cơ bản* $\mathbf{X}(t)$ *bất kì đều bị chặn trên khoảng* $[t_0, \infty)$.

(ii) *Nghiệm* $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ *của hệ phương trình vi phân tuyến tính (4) là ổn định tiệm cận khi và chỉ khi đối với ma trận cơ bản* $\mathbf{X}(t)$ *bất kì, ta có*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = 0.$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu $A(t) = A$ là ma trận hằng thì hệ phương trình vi phân (4) trở thành hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng có dạng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad t \geq 0. \tag{5}$$

Theo kết quả của Định lý 2.2 trong [1], ma trận cơ bản của hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng (5) được cho bởi

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

và nghiệm duy nhất xác định toàn cục của hệ phương trình vi phân (5) với điều kiện ban đầu $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $t_0 \geq 0$ được cho bởi

$$\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0.$$

Sau đây, chúng ta trình bày một đặc trưng đại số cho tính ổn định của hệ (5) thông qua tập phổ $\sigma(A)$ gồm tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

Định lý 2.3 ([1], Định lý 1.2, Chương 4)**.** *Đặt*

$$Re\,(\sigma(A)) := \max\{Re(\lambda) : \lambda \text{ là giá trị riêng của } A\}.$$

Khi đó ta có

(i) *Nếu* $Re\,(\sigma(A)) < 0$ *thì hệ phương trình vi phân* (5) *ổn định tiệm cận.*

(ii) *Nếu* $Re\,(\sigma(A)) > 0$ *thì hệ phương trình vi phân* (5) *không ổn định.*

(iii) *Nếu* $Re\,(\sigma(A)) = 0$ *thì hệ phương trình vi phân* (5) *là không ổn định tiệm cận và hệ này là ổn định khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng có phần thực bằng* 0 *là nửa đơn.*

Sau đây là một số ví dụ minh họa cho kết quả của Định lý 2.3:

Ví dụ 2.1. Xét tính ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \tag{6}$$

trong đó $t > 0$ và hàm $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^\top$ là ẩn hàm của hệ.

Lời giải. Phương trình đặc trưng ứng với hệ phương trình vi phân (6) cho bởi

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) - 3\alpha = 0$$

tương đương với

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 3\alpha = 0.$$

Phương trình trên có biệt thức $\Delta = 1 + 12\alpha$. Khi đó, chúng ta xét các trường hợp sau:

TH1. Nếu $\alpha = -\frac{1}{12}$, tức là $\Delta = 0$, thì phương trình trên có nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$ với $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\frac{3}{2} < 0$. Do đó, theo Định lý 2.3, hệ phương trình (6) là ổn định tiệm cận.

TH2. Nếu $\alpha < -\frac{1}{12}$, tức là $\Delta < 0$, thì phương trình trên có hai nghiệm phức liên hợp lần lượt cho bởi

$$\lambda_1 = \frac{-3 - i\sqrt{-(1+12\alpha)}}{2} \qquad \text{và} \qquad \lambda_2 = \frac{-3 + i\sqrt{-(1+12\alpha)}}{2}.$$

Do $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\frac{3}{2} < 0$ nên theo Định lý 2.3, hệ phương trình (6) là ổn định tiệm cận.

TH3. Nếu $\alpha > -\frac{1}{12}$, tức là $\Delta > 0$, thì phương trình trên có hai nghiệm thực phân biệt lần lượt cho bởi

$$\lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{1+12\alpha}}{2} < 0 \qquad \text{và} \qquad \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{1+12\alpha}}{2}.$$

Khi đó, sự ổn định của hệ phương trình 6 sẽ phụ thuộc vào giá trị của tham số α. Cụ thể, chúng ta có

- Nếu $-\frac{1}{12} < \alpha < \frac{2}{3}$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm âm phân biệt và do đó, hệ phương trình (6) là ổn định tiệm cận.
- Nếu $\alpha = \frac{2}{3}$ thì phương trình đặc trưng có một nghiệm thực âm và một nghiệm $\lambda_2 = 0$. Hơn nữa, không gian con riêng sinh bởi vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ có số chiều 1. Do đó, hệ phương trình (6) ổn định.
- Nếu $\alpha = \frac{2}{3}$ thì phương trình đặc trưng có một nghiệm thực âm và một nghiệm thực dương. Do đó, hệ phương trình (6) không ổn định.

Ví dụ 2.2. *Chứng minh rằng điểm cân bằng của hệ dưới đây không ổn định*

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - 2\mathbf{y} \\ \ddot{\mathbf{y}} = -3\dot{\mathbf{x}} + 2\dot{\mathbf{y}}. \end{cases}$$

Chứng minh. Bằng cách đặt

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}} \text{ và } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{y}},$$

hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - 2\mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{v}} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}. \end{cases}$$

Hệ phương trình vi phân trên có điểm cân bằng $(0,0,0,0)$. Tiếp theo, chúng ta xét phương trình đặc trưng tương ứng cho bởi

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda+6)=0.$$

Phương trình đặc trưng có 4 nghiệm phân biệt

$$\lambda=0,\lambda=-1,\lambda=2\pm i\sqrt{2}.$$

Khi đó, vì $\mathrm{Re}\,(\sigma(A))=2>0$ nên điểm cân bằng của hệ không ổn định. □

3. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TỰA TUYẾN TÍNH

Trong mục này, chúng ta sẽ tập trung vào mục tiêu chính của bài báo là nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân với "phần chính là tuyến tính" hay nói cách khác là hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính (1). Trước hết, chúng ta nhắc lại biểu thức của hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính (1):

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+f(t,\mathbf{x}(t)),\qquad t\geq 0.$$

Bằng cách áp dụng công thức biến thiên hằng số, nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu dưới đây:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+f(t,\mathbf{x}(t)), & t>t_0\\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0\end{cases}$$

được cho bởi

$$\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)=e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}f(s,\mathbf{x}(s))ds. \tag{7}$$

Chú ý rằng do hàm $f(t,\mathbf{x}(t))$ là "nhỏ" khi $\mathbf{x}$ "nhỏ" nên tính ổn định của nghiệm không $\mathbf{x}\equiv\overline{0}$ của hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính (1) sẽ được suy ra từ tính ổn định của phần tuyến tính. Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu tiêu chuẩn ổn định và tiêu chuẩn không ổn định cho hệ phương trình (1) với giả thiết sau:

(H) Hàm $f(t,\mathbf{x})$ xác định và liên tục trên $\{(t,\mathbf{x}):t\geq 0,\|\mathbf{x}\|\leq\alpha\}$ và thỏa mãn

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to 0}\frac{\|f(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}=0\quad\text{đều với } t\geq 0. \tag{8}$$

Vì vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $f(t,\overline{0})=\overline{0}$.

Định lý 3.1 (Định lý ổn định, [1], Định lý 1.4, Chương 4). *Giả sử rằng hàm $f(t, \mathbf{x})$ thỏa mãn giả thiết **(H)** và $Re\,(\sigma(A)) < 0$. Khi đó, nghiệm $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ của hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính (1) là ổn định tiệm cận.*

Ví dụ 3.1. Xét tính ổn định của điểm cân bằng $(0, 0)$ ứng với các hệ phương trình vi phân dưới đây:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10 \sin x_1 - 29x_2 + 3x_2^3 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - 14 \sin x_2 + x_2^2. \end{cases}$$

Lời giải. Đầu tiên, chúng ta viết lại hệ phương trình vi phân đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10x_1 - 29x_2 + 10(\sin x_1 - x_1) + 3x_2^3 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - 14x_2 - 14(\sin x_2 - x_2) + x_2^2. \end{cases}$$

Chú ý rằng do $\sin x_1 - x_1 = o(x_1)$ khi $x_1 \to 0$ và $\sin x_2 - x_2 = o(x_2)$, $x_2^3 = o(x_2)$, $x_2^2 = o(x_2)$ khi $x_2 \to 0$ nên hệ phương trình vi phân đã cho là một hệ tựa tuyến tính và do đó, tính ổn định của điểm cân bằng $(0, 0)$ sẽ phụ thuộc vào tính ổn định của hệ tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10x_1 - 29x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - 14x_2. \end{cases}$$

Đa thức đặc trưng của hệ phương trình trên cho bởi

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -29 \\ 5 & -14 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

có các giá trị riêng là $\lambda = -2 \pm i$. Do $\mathrm{Re}\,(\sigma(A)) = -2 < 0$ nên điểm cân bằng $(0, 0)$ là ổn định tiệm cận.

Định lý 3.2 (Định lý về tính không ổn định, [1], Định lý 1.5, Chương 4). *Giả sử rằng hàm $f(t, \mathbf{x})$ thỏa mãn giả thiết **(H)** và $Re\,(\sigma(A)) > 0$. Khi đó, nghiệm $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ của hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính (1) không ổn định.*

Ví dụ 3.2. Xét tính ổn định của điểm cân bằng $(0, 0)$ ứng với các hệ phương trình vi phân dưới đây:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - 3x_1^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 + x_2^4. \end{cases}$$

Lời giải. Do $-3x_1^2 = o(x_1)$ khi $x_1 \to 0$ và $2x_1^2 + x_2^4 = o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ khi $(x, y) \to (0, 0)$ nên hệ đã cho là một hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính và chúng ta chỉ cần xét tính ổn định của hệ tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Đa thức đặc trưng ứng với hệ phương trình trên là

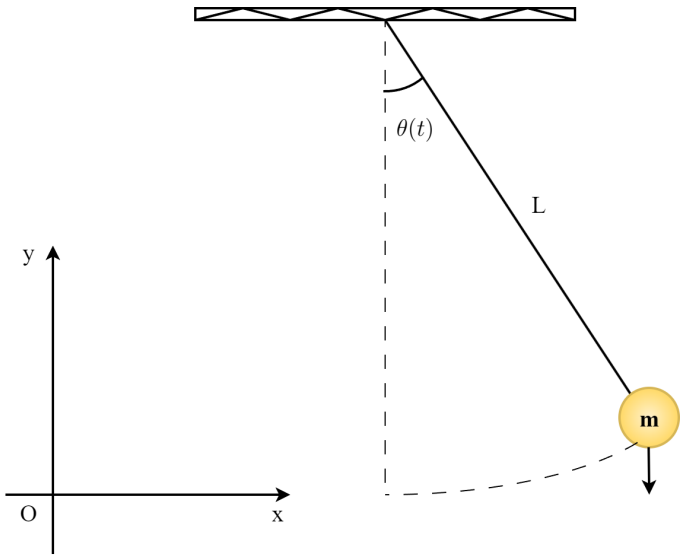
$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+4)=0.$$

Phương trình đặc trưng có các nghiệm $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=-4$. Vì $\mathrm{Re}\,(\sigma(A))=1>0$ nên điểm cân bằng $(0,0)$ không ổn định.

Ví dụ 3.3. Xét dao động tắt dần của con lắc đơn được mô tả bởi phương trình vi phân cấp hai dưới đây:

$$\ddot{\theta}(t)+\lambda\dot{\theta}(t)+\sin\left(\theta(t)\right)=0, \tag{9}$$

trong đó $\lambda>0$ và θ là góc tạo bởi con lắc với phương thẳng đứng (xem Hình 3).



Hình 3. Dao động tắt dần của con lắc đơn.

Lời giải. Đặt $x_1(t)=\theta(t)$ và $x_2(t)=\dot{\theta}(t)$. Khi đó, chúng ta có thể viết lại phương trình vi phân (9) như sau:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\lambda x_2-\sin x_1.\end{cases} \tag{10}$$

Xét hai điểm cân bằng của mô hình con lắc đơn là vị trí cân bằng thẳng đứng phía dưới $(0,0)$ và vị trí cân bằng thẳng đứng phía trên $(\pi,0)$.

- Đối với điểm cân bằng $(0,0)$, chúng ta viết lại hệ phương trình (10) dưới dạng

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-\lambda x_2+x_1-\sin x_1.\end{cases}$$

Chú ý rằng $x_1 - \sin x_1 = o(x_1)$ khi $x_1 \to 0$. Thêm vào đó, các giá trị riêng của hệ phương trình vi phân tuyến tính tương ứng là

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-\lambda}{2} \pm \sqrt{\lambda^2 - 4} & \text{nếu } \lambda \geq 2, \\ -\dfrac{\lambda}{2} \pm i\sqrt{4 - \lambda^2} & \text{nếu } 0 < \lambda < 2. \end{cases}$$

Trong cả hai trường hợp, chúng ta đều có $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ nên điểm cân bằng $(0, 0)$ là ổn định tiệm cận.

- Đối với điểm cân bằng $(\pi, 0)$, bằng cách thực hiện phép đổi biến $x_1 = x_3 + \pi$, chúng ta nhận được

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\lambda x_2 + \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$$

hay tương đương với

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\lambda x_2 + x_3 + \sin x_3 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2. \end{cases}$$

Bằng phương pháp tương tự, chúng ta có thể thấy rằng điểm cân bằng $(x_2, x_3) = (0, 0)$ không ổn định, tức là điểm cân bằng $(\pi, 0)$ của hệ phương trình vi phân ban đầu cũng không ổn định.

Như vậy, chúng ta có thể thấy rằng kết quả nhận được về tính ổn định của hai điểm cân bằng của con lắc đơn dao động tắt dần rất phù hợp về phương diện vật lý cũng như trực giác thông thường.

Tiếp theo, chúng ta xét một số trường hợp đặc biệt về tính ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính có dạng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{x}(t), \tag{11}$$

trong đó $B(t)$ là một hàm liên tục với $t \geq t_0$. Hệ phương trình vi phân tuyến tính trên gợi mở ý tưởng về việc phân ra một hàm ma trận $C(t)$ thành tổng của một ma trận hằng A và một hàm ma trận $B(t)$ thỏa mãn một số điều kiện cụ thể nhằm khảo sát các tính chất định tính kéo theo. Để phục vụ các đánh giá trong các kết quả tiếp theo, chúng ta nhắc lại bổ đề Gronwall-Bellman (xem [1]):

Bổ đề 3.1 (Bất đẳng thức Gronwall-Bellman, xem [1], trang 55)**.** Giả sử rằng $\lambda(t)$, $\mu(t)$ là các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $\mu(t)$ là hàm không âm trên đoạn $[a, b]$. Nếu $x(t)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$x(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)x(s)ds, \qquad a \leq t \leq b,$$

thì

$$x(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) \exp\Big(\int_s^t \mu(\tau)d\tau\Big)ds$$

với mọi $t \in [a, b]$. Đặc biệt, nếu $\lambda(t) \equiv \lambda$ là hàm hằng thì

$$x(t) \leq \lambda \exp\Big(\int_a^t \mu(s)ds\Big),$$

trong đó $\exp(t)$ kí hiệu cho hàm e^t.

Khi đó, chúng ta có các mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1. Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính (11). Giả sử rằng

(i) Các giá trị riêng λ_k của ma trận A, $k = 1, 2, \dots n$ thỏa mãn $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ và các giá trị riêng λ_k với $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ là phân biệt.

(ii) $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|dt$ bị chặn.

Chứng minh rằng các nghiệm của hệ bị chặn và nghiệm $\mathbf{x} = \overline{0}$ là ổn định.

Chứng minh. Đầu tiên, ma trận cơ bản của hệ phương trình vi phân tuyến tính dừng $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ cho bởi

$$\mathbf{X}(t) = e^{(t-t_0)A}.$$

Đổi biến $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t)$ và thay vào hệ phương trình (11), ta nhận được

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t)\right) = A\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t) + B(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t),$$

tương đương với

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{X}(t))\mathbf{z}(t) + \mathbf{X}(t)\frac{d}{dt}(\mathbf{z}(t)) \\ = A\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t) + B(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t).\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{X}(t)) = Ae^{(t-t_0)A} = A\mathbf{X}(t).$$

Do đó, ta có

$$A\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t) + B(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t).$$

Cuối cùng, ta nhận được

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)B(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t).$$

Tích phân hai vế phương trình trên và nhân cả hai vế với $\mathbf{X}(t)$, ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t)\\ &= \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t-s+t_0)B(s)\mathbf{x}(s)ds,\end{aligned}$$

trong đó các số hạng của biểu thức trên được cho như sau:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{z}(t)\\ &\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\\ &\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) = e^{(t-t_0)A}e^{-(s-t_0)A} = e^{(t-s)A} = \mathbf{X}(t-s+t_0).\end{aligned}$$

Từ đó, chúng ta suy ra

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\mathbf{X}(t)\| \cdot \|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{X}(t-s+t_0)\| \cdot \|B(s)\| \cdot \|\mathbf{x}(s)\|ds.$$

Do $\mathrm{Re}(\lambda_k) \le 0$ và các giá trị riêng λ_k có $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ là phân biệt nên $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\ge t_0}$ bị chặn với mọi $t \ge t_0$, tức là

$$\|X(t)\| \le C_0 \quad \text{với mọi } t \ge t_0.$$

Từ đó, chúng ta nhận được

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le C_0\|\mathbf{x}_0\| + C_0 \int_{t_0}^{t} \|B(s)\| \cdot \|\mathbf{x}(s)\|ds.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Gronwall-Bellman (Bổ đề 3.1) với

$$\lambda = C_0\|\mathbf{x}_0\| \text{ và } \mu(t) = C_0\|B(t)\|,$$

ta có

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le C_0\|\mathbf{x}_0\| \exp\left(C_0 \int_{t_0}^{t} \|B(s)\|ds\right). \tag{12}$$

Theo giả thiết (ii), tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|dt \le M \text{ với mọi } t \ge t_0.$$

Do đó, bất đẳng thức (12) trở thành

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le C_0\|\mathbf{x}_0\| \exp(C_0M).$$

Điều trên tương đương với nghiệm $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ bị chặn. Hơn nữa, chúng ta có thể chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{C_0}\exp(-C_0M)$ sao cho nếu $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ thì

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon \quad \text{với mọi } t \ge t_0,$$

tức là nghiệm $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ là ổn định đều theo nghĩa Lyapunov. □

Mệnh đề 3.2. Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính (11). Giả sử rằng

(i) Các giá trị riêng của ma trận A đều có phần thực âm.

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$.

Chứng minh rằng các nghiệm của hệ phương trình vi phân (11) đều dần tới $\overline{0}$ và nghiệm $\mathbf{x} = \overline{0}$ là ổn định tiệm cận.

Chứng minh. Xét phương trình vi phân tuyến tính (11) và đặt $\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}$ là ma trận cơ bản của phương trình vi phân tuyến tính tương ứng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Khi đó, theo chứng minh của Mệnh đề 3.1, chúng ta nhận được

$$\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t-\tau+t_0)\| \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau.$$

Vì A có các giá trị riêng có phần thực âm nên tồn tại $C_1 > 0$ và $\mu > 0$ sao cho

$$\|\Phi(t)\| \le C_1 e^{-\mu(t-t_0)} \quad \text{với mọi } t \ge t_0.$$

Mặt khác, theo giả thiết (ii), do $\lim\limits_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $t_1(\varepsilon) > t_0$ sao cho có bất đẳng thức

$$\|B(t)\| \le \varepsilon \text{ với mọi } t \ge t_1(\varepsilon).$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}(t)\| &\le C_1 e^{-\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} C_1 e^{-\mu(t-\tau)}\|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau \\
&\le C_1 e^{-\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{-\mu(t-\tau)}\|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau \\
&\quad + \int_{t_1}^{t} C_1 e^{-\mu(t-\tau)}\|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau.
\end{aligned}$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $e^{\mu(t-t_0)}$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
&e^{\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t)\| \\
&\le C_1 \left[\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mu(\tau-t_0)}\|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau + \int_{t_1}^{t} e^{\mu(\tau-t_0)}\|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau\right]. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\varepsilon C_1 < \mu$. Khi đó, tồn tại $C_2 > 0$ sao cho

$$\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^{t_1} e^{-\mu(t-\tau)}\|B(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau \le C_2.$$

Do đó, bất đẳng thức (13) trở thành

$$e^{\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t)\| \leq C_1C_2 + C_1\varepsilon \int_{t_1}^{t} e^{\mu(\tau-t_0)}\|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau.$$

Tiếp đó, bằng cách áp dụng bất đẳng thức Gronwall-Bellman, chúng ta thu được

$$e^{\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t)\| \leq C_1C_2e^{C_1\varepsilon(t-t_1)}$$

hay tương đương với

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq C_1C_2e^{(C_1\varepsilon-\mu)t-C_1\varepsilon t_1+\mu t_0}.$$

Do $C_1\varepsilon - \mu < 0$ nên chúng ta suy ra

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Điều này chứng tỏ các nghiệm của hệ (11) đều dần tới $\overline{0}$ và hơn nữa, nghiệm $\mathbf{x} \equiv \overline{0}$ là ổn định tiệm cận. □

KẾT LUẬN

Trong bài viết này, chúng tôi đã trình bày đôi nét về tính ổn định của hệ phương trình vi phân bao gồm hệ phương trình vi phân tuyến tính và hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính. Đặc biệt, bài viết nhấn mạnh tìm hiểu về lớp hệ phương trình vi phân tựa tuyến tính. Các khái niệm và mệnh đề đưa ra trong bài viết được minh họa bởi hệ thống các ví dụ tính toán. Bài viết kỳ vọng sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích cho các bạn sinh viên quan tâm tới lý thuyết định tính và đặc biệt là lý thuyết ổn định của hệ phương trình vi phân.

Lời cảm ơn

Nhóm tác giả chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Phương Đông, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn nhóm tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C.T. Anh, *Cơ sở lý thuyết ổn định phương trình vi phân*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2015.

[2] N.T. Hoàn, P. Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2014.

[3] S.H. Zăk, *Systems and Control*, School of Electrical and Computer Engineering Purdue University, Oxford University Press, 2003.

[4] `https://math24.net/stability-theory-basic-concepts.html`.

BỘI GIAO CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Nguyễn Hương Giang, Đinh Thị Thùy Linh - K46B SPT
Nguyễn Thị Thảo - K46E SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. *Trong mặt phẳng tọa độ, chúng ta đã biết với hai đường cong cho trước thì chúng có thể có các vị trí tương đối như: không có điểm chung, cắt nhau, tiếp xúc nhau hoặc có các thành phần trùng nhau. Chúng ta biết rằng nếu đồ thị hai hàm số $(C_1) : y = f(x)$ và $(C_2) : y = g(x)$ có một điểm chung có hoành độ x_0 thì tồn tại số $k \geq 0$ (gọi là số bội của x_0) để $f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)$ với mọi $0 \leq i \leq k$ và $f^{(i)}(x_0) \neq g^{(i)}(x_0)$. Nếu số bội $k = 1$ thì C_1 cắt C_2 tại điểm có hoành độ x_0. Nếu $k \geq 1$ thì C_1 tiếp xúc C_2 tại điểm có hoành độ x_0. Bài toán xác định số bội k là bài toán khó. Tổng quát hơn khi C_1 và C_2 là 2 đường cong (không nhất thiết là đồ thị của hai hàm số) thì bài toán trở nên phức tạp hơn. Vì vậy, việc nghiên cứu số bội của hai đường cong là bài toán có ý nghĩa.*

Trong bài viết này chúng tôi nghiên cứu về các vị trí tương đối của hai đường cong trong mặt phẳng afin. Dựa trên tài liệu [1] của A. Gathmann chúng tôi giới thiệu một bất biến là số bội giao của hai đường cong để nghiên cứu vấn đề này.

1. ĐƯỜNG CONG PHẲNG

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu về các đường cong trong mặt phẳng tọa độ $\mathbb{R}^2$. Cho F và G là hai đa thức khác hằng trong $\mathbb{R}[x, y]$, ta nói F tương đương với G, ký hiệu $F \sim G$, nếu có số thực $\lambda \neq 0$ sao cho $F = \lambda G$. Rõ ràng quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}[x, y]$. Chúng ta gọi mỗi lớp tương đương của một đa thức F khác hằng trong $\mathbb{R}[x, y]$ là một đường cong và gọi là *đường cong cho bởi* F hay đơn giản là đường cong F. Như vậy nếu $F \sim G$ thì đường cong cho bởi F và G là trùng nhau.

Về mặt hình học, chúng ta thường hình dung một đường cong F thông qua tập nghiệm $V(F)$ của nó trong $\mathbb{R}^2$. Nhưng lưu ý rằng nếu $V(F) = V(G)$ thì không nhất thiết hai đường cong cho bởi F và G là trùng nhau. Ví dụ cho đa thức $F = x + y$ và $G = (x + y)^2$ thì $V(F) = V(G)$ đều là đường thẳng $y = -x$ trong $\mathbb{R}^2$, tuy nhiên $F \nsim G$.

Định nghĩa 1.1. Một đường cong F được gọi là bất khả quy trong $\mathbb{R}^2$ nếu đa thức F là bất khả quy trong $\mathbb{R}[x, y]$.

Vì $\mathbb{R}$ là một trường nên vành $\mathbb{R}[x, y]$ là miền nhân tử hóa. Từ đó, vì $\deg(F) > 0$ chúng ta luôn phân tích được

$$F = F_1^{\alpha_1} \dots F_k^{\alpha_k},$$

ở đó F_i là các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{R}[x, y]$ và α_i là các số nguyên dương với mọi

$1 \leq i \leq k$. Ta gọi F_i là các thành phần bất khả quy của đường cong F và α_i là bậc của các thành phần này.

Ví dụ 1.1.

1) Đa thức $x+y$ là bất khả quy trong $\mathbb{R}[x,y]$ nên đường thẳng $x+y$ là bất khả quy trong $\mathbb{R}^2$.

2) Đường cong cho bởi xy không bất khả quy trong $\mathbb{R}^2$ vì đa thức xy có hai thành phần bất khả quy bậc 1 là x và y.

Bổ đề 1.1. Cho F là một đường cong trong $\mathbb{R}^2$. Gọi $V(F)$ là tập nghiệm của F. Khi đó, tập $\mathbb{R}^2 \setminus V(F)$ là vô hạn.

Chứng minh. Vì F khác hằng nên bậc của F theo x hoặc y phải dương. Ta có thể giả sử $\deg_y F = n > 0$. Khi đó $F = a_n x_n + \cdots + a_0$ với $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}[y]$ và $a_n \neq 0$. Vì $a_n(y)$ là đa thức một ẩn khác không trong $\mathbb{R}[y]$ nên nó chỉ có hữu hạn nghiệm thực. Vì vậy có vô số $\beta \in \mathbb{R}$ sao cho $a_n(\beta) \neq 0$. Với mỗi β như vậy, đa thức $F(x,\beta)$ là một đa thức một ẩn khác không trong $\mathbb{R}[x]$ nên có vô số $\alpha \in \mathbb{R}$ để $F(\alpha,\beta) \neq 0$. □

Cho hai đường cong F và G. Khi đó rõ ràng tập nghiệm chung của F và G là

$$V(F,G) = V(F) \cap V(G).$$

Bổ đề 1.2. Cho hai đường cong F và G. Nếu F và G không có thành phần chung thì tập $V(F,G)$ là hữu hạn.

Chứng minh. Vì F và G không có ước bất khả quy chung nên chúng nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{R}[x,y]$. Ta sẽ chỉ ra rằng F và G cũng nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{R}(x)[y]$, ở đó

$$\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \middle| \; p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x], q(x) \neq 0 \right\}$$

là trường các thương của miền nguyên $\mathbb{R}[x]$. Thật vậy, giả sử F và G có một ước chung H' trong $\mathbb{R}(x)[y]$. Khi đó bằng cách nhân với mẫu số chung, ta có thể viết $aF = HF'$ và $aG = HG'$ với $H, F', G' \in \mathbb{R}[x,y]$ bậc dương theo y và $a \in \mathbb{R}[x]$ khác 0. Khi đó rõ ràng mỗi nhân tử bất khả quy của a là ước của H hoặc của cả F' và G'. Vì vậy phân tích a thành tích các nhân tử bất khả quy và giản ước hai vế ta nhận được $F = H''F''$ và $G = H''G''$ với $H'', F'', G'' \in \mathbb{R}[x,y]$ bậc dương theo y. Điều này mâu thuẫn với F và G nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{R}[x,y]$.

Bây giờ vì $\mathbb{R}(x)$ là một trường nên vành đa thức một ẩn $\mathbb{R}(x)[y]$ là vành chính. Do đó vì F và G cũng nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{R}(x)[y]$ nên tồn tại $u, v \in\in \mathbb{R}(x)[y]$ sao cho $uF + vG = 1$. Lại bằng cách nhân hai vế với mẫu số chung, ta viết được $DF + EG = c$ với $D, E \in \mathbb{R}[x,y]$ và $c \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$. Khi đó, nếu $P = (x_0, y_0)$ là một nghiệm chung bất kỳ của F và G thì $c(x_0) = 0$. Nhưng đa thức $c(x) \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức một ẩn khác không nên chỉ có

hữu hạn nghiệm trong $\mathbb{R}$. Vì vậy trong tất cả các nghiệm chung của F và G chỉ có hữu hạn các hoành độ khác nhau. Lập luận tương tự, do vai trò các ẩn x, y như nhau chúng ta cũng suy ra được trong tất cả các nghiệm chung của F và G chỉ có hữu hạn các tung độ khác nhau. Điều này chỉ ra rằng $V(F,G)$ là hữu hạn. □

2. BỘI GIAO CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Định nghĩa 2.1. Cho điểm $P \in \mathbb{R}^2$. Ta gọi

$$\mathcal{O}_P = \left\{ \frac{f}{g} \middle| \ f, g \in \mathbb{R}[x,y], g(P) \neq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}(x,y)$$

là vành địa phương tại P. Ánh xạ $\mathcal{O}_P \to \mathbb{R}, \frac{f}{g} \mapsto \frac{f(P)}{g(P)}$ được gọi là ánh xạ định giá tại P, nó có hạt nhân

$$I_P = \left\{ \frac{f}{g} \middle| \ f, g \in \mathbb{R}[x,y], f(P) = 0, g(P) \neq 0 \right\} \subseteq \mathcal{O}_P.$$

Về mặt đại số, ta thấy rằng $\mathcal{O}_P$ là địa phương hóa của vành đa thức $\mathbb{R}[x,y]$ tại iđêan cực đại $(x - x_0, y - y_0)$ với $P = (x_0, y_0)$. Chúng ta có toàn cấu tự nhiên $\mathbb{R}[x,y] \to \mathcal{O}_P, F \mapsto \frac{F}{1}$.

Định nghĩa 2.2. Cho điểm $P \in \mathbb{R}^2$ và hai đường cong F và G. Ta gọi bội giao của F và G tại P là

$$\mu_P(F,G) := \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_P/(F,G) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Nhận xét 2.1.

(1) Cho $a, b, c, d, e, g \in \mathbb{R}$ với $ae - bd \neq 0$. Khi đó ta có phép biến đổi tọa độ

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (ax + by + c, dx + ey + g) \end{aligned}$$

Phép biến đổi này nếu biến điểm P thành P', biến đường cong F, G thành F', G' tương ứng thì có các đẳng cấu giữa $\mathcal{O}_P$ và $\mathcal{O}_{P'}$, giữa $\mathcal{O}_P/(F,G)$ thành $\mathcal{O}_{P'}/(F',G')$. Do đó

$$\mu_P(F,G) = \mu_{P'}(F',G').$$

Vì vậy bằng cách chọn biến đổi tọa độ thích hợp ta luôn có thể đưa việc tính bội giao của 2 đường cong về việc tính bội giao tại gốc tọa độ.

(2) Bội giao có tính đối xứng, tức là $\mu_P(F,G) = \mu_P(G,F)$.

(3) $\mu_P(F, G + FH) = \mu_P(F,G)$.

(4) Nếu $P \notin F$ hoặc $P \notin G$ thì F khả nghịch hoặc G khả nghịch trong $\mathcal{O}_P$, do đó $(F,G) = \mathcal{O}_P$. Vì vậy, ta được

$$\mu_P(F,G) = 0.$$

Mệnh đề 2.1. Cho điểm $P \in \mathbb{R}^2$ và hai đường cong F và G. Khi đó các khẳng định sau là đúng.

(1) $\mu_P(F,G) \geq 1$ khi và chỉ khi $P \in F \cap G$.

(2) $\mu_P(F,G) = 1$ khi và chỉ khi $(F,G) = I_P$.

Chứng minh.
(1) Theo Nhận xét 2.1(4) chúng ta chỉ còn phải chỉ ra rằng nếu $P \in F \cap G$ thì $\mu_P(F,G) \geq 1$. Thật vậy, vì $P \in F \cap G$ nên quy tắc sau là một ánh xạ

$$\mathcal{O}_P/(F,G) \to \mathbb{R}, \frac{f}{g} + (F,G) \mapsto \frac{f(P)}{g(P)}.$$

Hơn nữa nó còn là một toàn cấu các $\mathbb{R}$-không gian véctơ. Do đó

$$\mu_P(F,G) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_P/(F,G) \geq 1.$$

(2) Giả sử $\mu_P(F,G) = 1$ khi đó toàn cấu trong ý (1) là một đẳng cấu. Vì vậy $(F,G) = I_P$. Ngược lại nếu $(F,G) = I_P$ thì $P \in F \cap G$. Do đó ta định nghĩa được ánh xạ

$$\mathcal{O}_P/(F,G) \to \mathbb{R}, \frac{f}{g} + (F,G) \mapsto \frac{f(P)}{g(P)}.$$

Ánh xạ này rõ ràng là một đẳng cấu, do đó $\mu_P(F,G) = 1$. □

Ví dụ 2.1 (Bội giao của các trục tọa độ)**.** Cho $F = x$ và $G = y$ là hai trục tọa độ và O là gốc tọa độ. Khi đó $(x,y) = I_O$ trong $\mathcal{O}_O$. Do đó $\mu_0(F,G) = 1$.

Mệnh đề 2.2. Cho điểm $P \in \mathbb{R}^2$ và hai đường cong F và G. Nếu F và G có một thành phần chung đi qua P thì $\mu_P(F,G) = \infty$.

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại một nhân tử bất khả quy H của F và G mà $P \in H$. Ta viết

$$F = F'H^\alpha, G = G'H^\beta.$$

Khi đó, ta có toàn cấu tự nhiên

$$\mathcal{O}_P/(F,G) = \mathcal{O}_P/(F'H^\alpha, G'H^\beta) \to \mathcal{O}_P/(H).$$

Do đó, ta được

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_P/(F,G) \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_P/(H).$$

Chú ý rằng chúng ta luôn có thể chọn một đường cong T không có thành phần chung với H. Khi đó, với mọi $n \geq 1$, ta có $\{T^n\}_{n\geq 1}$ là một tập độc lập tuyến tính trong $\mathcal{O}_P/(H)$. Như vậy, ta có $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_P/(H) = \infty$. □

Ví dụ hai đường cong $F = xy$ và $G = x^3$ có một thành phần chung là $H = x$ đi qua gốc tọa độ. Vì vậy

$$\mu_0(xy, x^3) = \infty.$$

Trong trường hợp này $\mathcal{O}_O/(x^3, xy)$ có một cơ sở vô hạn là $1, x, x^2, y, y^2, y^3, \ldots$.

Mệnh đề 2.3 (Tính cộng tính của bội giao)**.** Cho điểm $P \in \mathbb{R}^2$ và ba đường cong F, G và H. Khi đó, các khẳng định sau là đúng.

(1) Nếu F và G không có thành phần chung đi qua P thì có một dãy khớp

$$0 \to \frac{\mathcal{O}_P}{(F,H)} \xrightarrow{.G} \frac{\mathcal{O}_P}{(F,GH)} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}_P}{(F,G)} \to 0,$$

trong đó π là toàn cấu tự nhiên.

(2) $\mu_P(F,GH) = \mu_P(F,G) + \mu_P(G,H)$

Chứng minh.
(1) Để chỉ ra dãy là khớp ta chỉ cần chỉ ra ánh xạ nhân với G là đơn cấu. Thật vậy, nếu ảnh của f/g bằng 0 trong $\mathcal{O}_P/(F,GH)$ thì tồn tại $f', f'', g', g'' \in \mathbb{R}[x,y]$ với $g'(P), g''(P) \neq 0$ sao cho

$$\frac{f}{g}G = \frac{f'}{g'}F + \frac{f''}{g''}GH.$$

Bằng cách nhân với mẫu số chung ta có thể giả sử chúng có cùng mẫu số, tức là

$$fG = f'F + f''GH.$$

Từ đây, ta suy ra G là ước của $f'F$ nên $G \mid f'$ (vì F và G nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{R}[x,y]$). Điều này suy ra tồn tại $a \in \mathbb{R}[x,y]$ sao cho $f' = aG$. Vì vậy $f = F + f''H$. Từ đó $f/g = 0$ trong $\mathcal{O}_P/(F,H)$.
(2) Nếu F và G không có thành phần chung đi qua P thì có một dãy khớp trong phần (1) các $\mathbb{R}$-không gian véctơ. Do đó $\mu_P(F,GH) = \mu_P(F,G) + \mu_P(G,H)$. Hơn nữa nếu F và G có thành phần chung đi qua P thì theo Mệnh đề 2.2 ta có $\mu_P(F,GH) = \infty = \mu_P(F,G) + \mu_P(G,H)$. Ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 2.2 (Bội giao với các trục tọa độ)**.** Cho F là một đường cong trong $\mathbb{R}^2$. Ta muốn tính số bội giao của F với trục hoành $G = y$ (hoặc trung tung $G = x$). Nếu F có một thành phần chính là trục hoành thì theo Mệnh đề 2.2, ta có $\mu_0(F,y) = \infty$.

Nếu ngược lại y không phải là một thành phần của F thì theo Nhận xét 2.1(3) chúng ta có thể loại bỏ tất cả các số hạng là bội của y từ F, tức là thay thế F bởi $F(x,0) \in \mathbb{R}[x]$. Ta viết $F(x,0) = x^m g$ với $g \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó

$$\mu_0(y,F) = \mu_0(y,x^m g) = m\mu_0(x,y) + \mu_0(y,g) = m.$$

Thuật toán tính bội giao tại gốc: Cho F và G là hai đường cong đi qua gốc $O = (0,0)$.

- Nếu cả F và G đều chứa một hạng tử độc lập với y, tức là

$$F = ax^m + \text{ (các hạng tử chứa } y \text{ hoặc các hạng tử có bậc theo } x \text{ nhỏ hơn } m),$$

$$G = bx^n + \text{ (các hạng tử chứa } x \text{ hoặc các hạng tử có bậc theo } y \text{ nhỏ hơn } n),$$

ở đó $a, b \in \mathbb{R}^*$ và $m, n \in \mathbb{N}$. Ta có thể giả sử $m \geq n$. Đặt $F' := F - \frac{a}{b}x^{m-n}G$. Khi đó bởi Nhận xét 2.1 ta có $\mu_0(F, G) = \mu_0(F', G)$. Vì $F'(0) = G(0) = 0$ nên ta có thể lặp lại thuật toán với F' và G để tính $\mu_0(F', G)$.

- Nếu một trong hai đa thức F và G, chẳng hạn F, không chứa đơn thức độc lập theo y. Khi đó ta có thể viết $F = yF'$. Theo tính công tính của bội giao (Mệnh đề 2.3) ta suy ra $\mu_0(F, G) = \mu_0(y, G) + \mu_0(F', G)$. Ở đó số bội $\mu_0(y, G)$ đã được tính như trong Ví dụ 2.2. Nếu $F'(0) \neq 0$ thì $\mu_0(F', G) = 0$ bởi Mệnh đề 2.1. Còn nếu $F'(0) = 0$ thì chúng ta có thể lặp lại thuật toán cho F' và G để tính $\mu_0(F', G)$.

Ví dụ 2.3.

1. Cho hai đường cong $F = y^2 - x^3$ và $G = x^2 - y^3$. Tính theo thuật toán trên, ta có

$$\begin{aligned}
\mu_0\left(y^2 - x^3, x^2 - y^3\right) &= \mu_0\left(y^2 - x^3 + x\left(x^2 - y^3\right), x^2 - y^3\right) \\
&= \mu_0\left(y^2 - xy^3, x^2 - y^3\right) \\
&= \mu_0\left(y^2(1 - x), x^2 - y^3\right) \\
&= \mu_0\left(y^2, x^2 - y^3\right) \\
&= 2\mu_0\left(y, x^2 - y^3\right) = 2\mu_0\left(y, x^2\right) \\
&= 4\mu_0(y, x) = 4.
\end{aligned}$$

2. Cho hai đường cong $F = x^2$ và $G = xy - x$. Tính theo thuật toán trên, ta có

$$\begin{aligned}
\mu_0\left(x^2, xy - x\right) &= \mu_0\left(x^2 + x(xy - x), xy - x\right) \\
&= \mu_0\left(x^2y, xy - x\right) \\
&= \mu_0(y, xy - x) \ + \mu_0\left(x^2, xy - x\right) \\
&= 1 + \mu_0\left(x^2, xy - x\right) \\
&= 2 + \mu_0\left(x^2, xy - x\right) \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

thuật toán được lặp lại không dừng. Vì vậy, ta được $\mu_0(x^2, xy - x) = \infty$.

Lời cảm ơn

Nhóm tác giả chân thành cảm ơn TS. Đỗ Văn Kiên, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn nhóm tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Gathmann, *Plane Algebraic Curves*, Class Notes TU Kaiserslautern, 2018. https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/curves-2023/curves-2023.pdf

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA TRƯỜNG VECTƠ

Nguyễn Hoàng Hà, Vũ Thị Minh Trang, Đỗ Duy An - K46B SPTTA
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. *Isaac Newton và Gottfried Wilhelm Leibniz được coi là hai nhà toán học lớn của thế kỷ 17 với những đóng góp quan trọng trong việc phát triển lí thuyết về tích phân đường. Isaac Newton đã xây dựng ra phương pháp tính tích phân đầu tiên, được gọi là "phương pháp Newton" hoặc "tích phân theo Newton". Ông sử dụng lí thuyết về phép tính vi phân để tính tích phân và áp dụng nó vào nhiều vấn đề khác nhau trong khoa học và đặc biệt là toán học. Công trình của Newton về tích phân được trình bày trong cuốn sách "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" (hay còn gọi là "Principia") xuất bản lần đầu vào năm 1687. Gottfried Wilhelm Leibniz cũng phát triển độc lập phương pháp tích phân vào khoảng thời gian này. Ông cũng có đóng góp quan trọng vào việc phát triển các ký hiệu toán học, bao gồm việc sử dụng ký hiệu* $\frac{d}{dx}$ *để biểu diễn đạo hàm và ký hiệu* $\int$ *để biểu diễn tích phân. Cả hai nhà toán học này đã đóng góp quan trọng vào việc xây dựng phép tính tích phân để tính toán năng lượng cũng như khối lượng của các đối tượng trong thực tế, và do đó họ đều được coi là cha đẻ của phương pháp tính tích phân đường.*

Tích phân đường của trường vectơ là một lĩnh vực quan trọng trong toán học, liên quan đến việc tính toán độ dài, diện tích hay năng lượng của các đối tượng trong không gian hai hoặc ba chiều. Các phương pháp tích phân đường cung cấp công cụ mạnh mẽ để nắm bắt và hiểu các đặc tính hình học và vật lý của các hình dạng, đường cong và không gian. Vì vậy, mục tiêu của bài viết này nhằm tìm hiểu và tổng hợp về các phương pháp tính tích phân đường của trường vectơ để giúp mọi người hiểu rõ và nắm được ý nghĩa của tích phân đường. Hơn nữa, bài viết kỳ vọng là một tài liệu tham khảo cho sinh viên khi học các học phần về giải tích hàm nhiều biến, giải tích vectơ.

1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

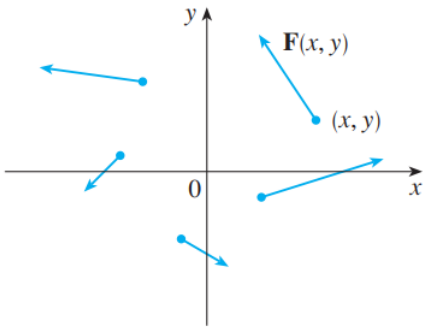
1.1. Trường vectơ, trường bảo toàn

Định nghĩa 1.1 (xem Definition 1, [1]). Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ (miền phẳng). Một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ là một hàm $\mathbf{F}$ cho tương ứng mỗi điểm (x, y) trong D với một vectơ hai chiều $\mathbf{F}(x, y)$.

Mô tả hình học cho trường vectơ $\mathbf{F}$ được cho trong Hình 1. Do với mỗi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y)$ là một vectơ hai chiều nên chúng ta có thể biểu diễn nó qua hai hàm thành phần $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ như sau:

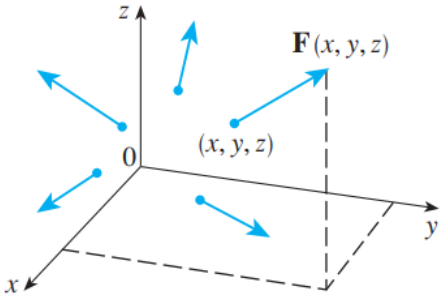
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j},$$

trong đó $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$.



Hình 1. Hình minh họa cho trường vectơ $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^2$

Định nghĩa 1.2 (xem Definition 2, [1])**.** Cho $E \subset \mathbb{R}^3$. Một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ là một hàm $\mathbf{F}$ cho tương ứng mỗi điểm (x, y, z) trong E với vectơ ba chiều $\mathbf{F}(x, y, z)$.



Hình 2. Hình minh họa cho trường vectơ $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^3$

Một trường vectơ $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^3$ được mô tả như trong Hình 2. Với mỗi điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, chúng ta có thể biểu diễn trường vectơ $\mathbf{F}$ thông qua các hàm thành phần $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ và $R(x, y, z)$ như sau:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

trong đó $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 1.3 ([1], tr.660)**.** Cho hàm hai biến $f(x, y)$. Gradient của hàm f, kí hiệu ∇f, là một hàm vectơ và được cho bởi

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Nhận xét 1.1. Ta thấy rằng khi f là một hàm hai biến, ∇f cũng chính là một trường vectơ trong $\mathbb{R}^2$. Tương tự, nếu f là một hàm ba biến, gradient của nó là một trường vectơ trong $\mathbb{R}^3$, xác định bởi

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Định nghĩa 1.4 ([1], tr. 759)**.** Một trường vectơ $\mathbf{F}$ được gọi là trường bảo toàn (conservative field) hay trường thế, nếu nó là gradient của một hàm nào đó, tức là tồn tại hàm f sao cho $\mathbf{F} = \nabla f$. Trong trường hợp này f được gọi là hàm thế vị của trường vectơ $\mathbf{F}$.

Ví dụ 1.1. Trường vectơ bảo toàn $\mathbf{F}$ của hàm thế vị $f(x, y) = xe^{xy}$ được cho bởi

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \nabla f &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= (xe^{xy} \cdot y + e^{xy})\mathbf{i} + (xe^{xy} \cdot x)\mathbf{j} \\ &= (xy+1)e^{xy}\mathbf{i} + x^2e^{xy}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.2. Định luật vạn vật hấp dẫn phát biểu rằng độ lớn của trường lực hấp dẫn giữa hai vật có khối lượng m và M tại vị trí có tọa độ $\mathbf{x} = (x, y, z)$ là

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{-mMg}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}.$$

Trường lực hấp dẫn là trường bảo toàn. Chúng ta có thể chọn hàm vô hướng

$$f(x, y, z) = \frac{mMg}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{-mMgx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMgy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMgz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z).\end{aligned}$$

1.2. Đường tham số

Định nghĩa 1.5 ([1], tr. 761)**.** Cho ánh xạ $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ là một hàm vectơ liên tục xác định bởi phương trình

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Khi đó, tập hợp $C = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ được gọi là đường tham số và phương trình (1) là phương trình tham số của đường cong C.

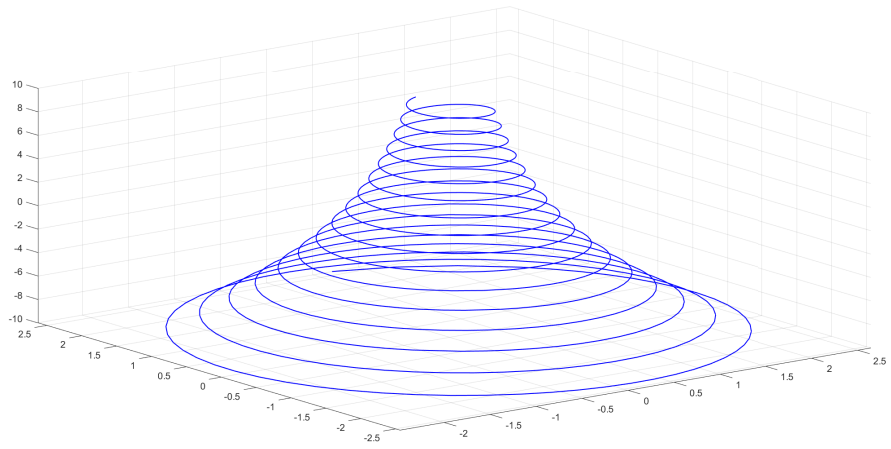
Ví dụ 1.3. Cho C là một đường cong được xác định bởi

$$x(t) = e^{-0.1t}\sin(5t), \quad y(t) = e^{-0.1t}\cos(5t), \quad z(t) = t, \quad t \in [-10, 10].$$

Đường cong C có thể biểu diễn dưới dạng phương trình tham số là

$$\mathbf{r}(t) = e^{-0.1t}\sin(5t)\mathbf{i} + e^{-0.1t}\cos(5t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

và biểu diễn hình học của nó được cho bởi Hình 3.



Hình 3. Đường cong tham số $\mathbf{r}(t) = e^{-0.1t}\sin(5t)\mathbf{i} + e^{-0.1t}\cos(5t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Nhận xét 1.2. Sau đây, chúng tôi giới thiệu một số tham số hóa của các đường cong quen thuộc trong $\mathbb{R}^2$.

(a) Đoạn thẳng với hai đầu mút $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + t\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

(b) Đường cong $y = f(x)$ đi từ điểm (a,b) đến (c,d):

$$x = x, \quad y = f(x), \quad x \in [a,c]\,.$$

(c) Đường cong $x = g(y)$ đi từ điểm (a,b) đến (c,d):

$$x = g(y), \quad y = y, \quad y \in [b,d]\,.$$

(d) Một phần của đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x = a\sin t, \quad y = a\cos t, \quad t \in [a,b] \subseteq [0,2\pi]\,.$$

(e) Một phần của đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x = a\sin t, \quad y = b\cos t, \quad t \in [a,b] \subseteq [0,2\pi]\,.$$

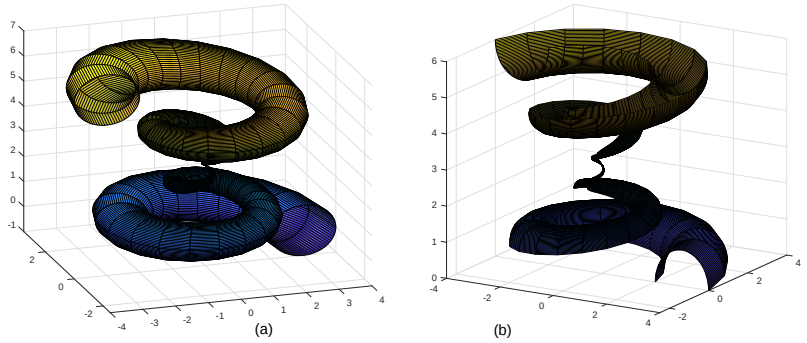
1.3. Mặt tham số

Định nghĩa 1.6 ([1], tr. 797)**.** Cho ánh xạ $\mathbf{r}(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là một hàm vectơ xác định bởi

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}. \tag{2}$$

Khi đó, tập hợp $S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là mặt tham số. Phương trình (2) được gọi là phương trình tham số của mặt S.

Ví dụ 1.4. Hàm vectơ $\mathbf{r}(u,v) = u\cos(2v)\mathbf{i} + u\sin(2v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$ là phương trình tham số biểu diễn cho một mặt xoắn ốc (xem Hình 4).



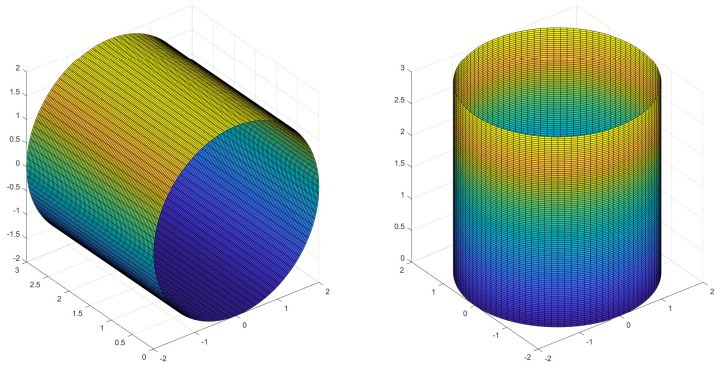
Hình 4. Mặt xoắn ốc $\mathbf{r}(u,v) = u\cos(2v)\mathbf{i} + u\sin(2v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$

Nhận xét 1.3. Sau đây, chúng tôi giới thiệu một số tham số hóa của một số mặt phẳng thường gặp.

(a) Mặt trụ với bán kính đáy r và trục đối xứng Oy

$$x = r\cos u, \qquad y = v, \qquad z = r\sin u,$$

trong đó $v \in \mathbb{R}, u \in [0, 2\pi]$ (xem Hình 5).



Hình 5. Mặt trụ với $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 3]$ và $r = 2$

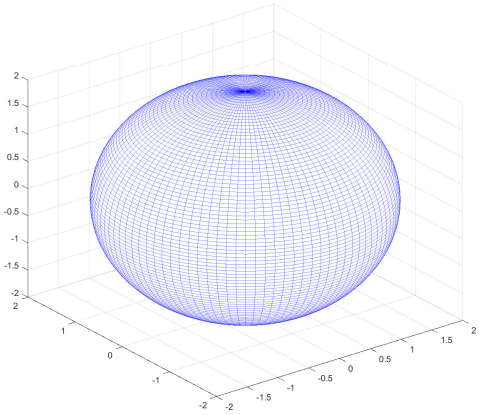
(b) Mặt phẳng qua P_0 với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OP_0}$ và chứa hai vectơ khác phương $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ và $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ có phương trình tham số của mặt phẳng là

$$\mathbf{r}(u,v) = \overrightarrow{r_0} + u\overrightarrow{\mathbf{a}} + v\overrightarrow{\mathbf{b}}.$$

(c) Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ có phương trình tham số dưới dạng

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = a\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = a\cos\theta,$$

trong đó $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ (xem Hình 6).

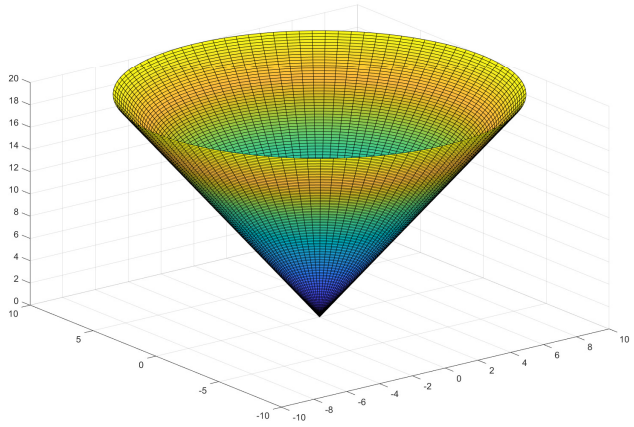


Hình 6. Mặt cầu với $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ và $a = 2$

(d) Mặt nón $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ có phương trình tham số dưới dạng:

- Dạng 1: $x = x$, $y = y$, $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$.
- Dạng 2 (Tọa độ cực): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = a\sqrt{x^2 + y^2} = ar$, trong đó $\varphi \in [0, 2\pi], r \geq 0$.

Minh họa cho mặt nón cho ở Hình 7.

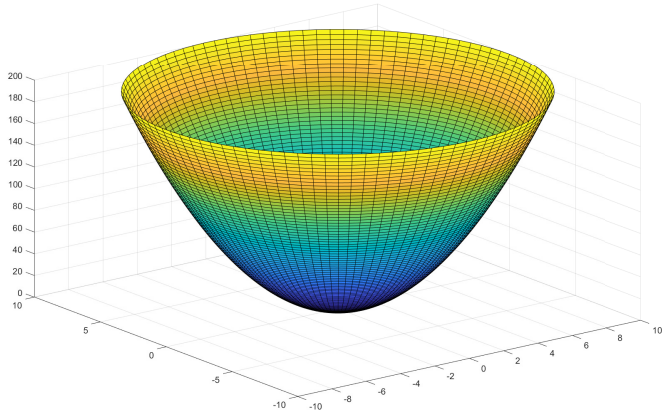


Hình 7. Mặt nón với $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 10]$ và $a = 2$

(e) Mặt paraboloid $z = a(x^2 + y^2)$ có phương trình tham số dưới dạng:

- Dạng 1: $x = x$, $y = y$, $z = a(x^2 + y^2)$.
- Dạng 2 (Tọa độ cực): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = a(x^2 + y^2) = ar^2$, trong đó $\varphi \in [0, 2\pi], r \geq 0$.

Minh họa cho mặt nón cho ở Hình 8.



Hình 8. Mặt nón với $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 10]$ và $a = 2$

2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA TRƯỜNG VECTƠ

Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày một số cách tiếp cận để tính tích phân đường của một trường vectơ $\mathbf{F}$ trong mặt phẳng và trong không gian như sử dụng định nghĩa, sử dụng định lý cơ bản của tích phân, sử dụng định lý Green hay sử dụng định lý Stokes. Các cách tiếp cận được đưa ra dựa trên tài liệu tham khảo [1].

2.1. Sử dụng định nghĩa tích phân đường

Chúng ta biết rằng công sinh ra bởi một lực biến thiên $f(x)$ khi di chuyển một chất điểm từ vị trí **a** tới vị trí **b** dọc theo trục Ox là $W = \int_b^a f(x)dx$ và công sinh ra bởi một lực không đổi $\mathbf{F}$ khi di chuyển một chất điểm từ điểm P tới điểm Q trong không gian là

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D},$$

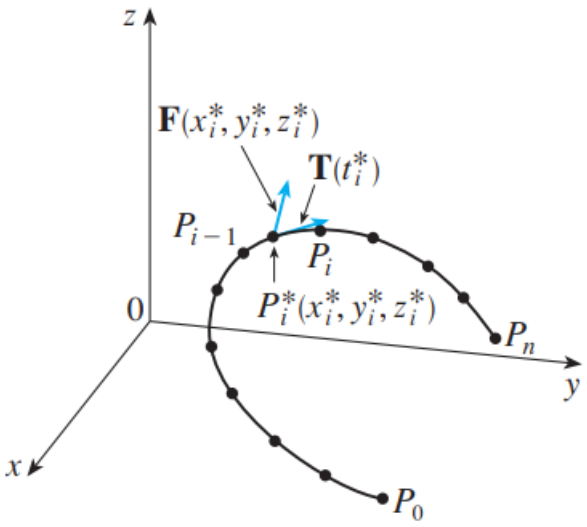
trong đó $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ là vectơ dịch chuyển.

Bây giờ, chúng ta giả sử rằng

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

là một trường vectơ liên tục trên $\mathbb{R}^3$. Chúng ta muốn tính công sinh ra bởi lực này khi di chuyển chất điểm dọc theo đường cong trơn C. Chúng ta chia C thành các cung nhỏ $P_{i-1}P_i$ với độ dài Δs_i bằng cách chia đoạn tham số $[a, b]$ thành n đoạn con bằng nhau (Hình **??**). Chọn một điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i tương ứng với giá trị tham số t_i^*. Nếu Δs_i là nhỏ thì khi chất điểm di chuyển từ P_{i-1} tới P_1 dọc theo đường cong, xem như nó di chuyển theo hướng $\mathbf{T}(t_i{}^*)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại P_{i^*}. Vì vậy công sinh ra bởi lực $\mathbf{F}$ khi di chuyển chất điểm từ P_{i-1} tới P_i xấp xỉ bằng

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i T(t_i*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i*)] \Delta s_i$$



Hình 9. Một phân hoạch của đường cong C

và tổng công sinh ra khi di chuyển chất điểm dọc theo C xấp xỉ

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i*, y_i*, z_i*)]\Delta s_i,$$

trong đó $\mathbf{T}(x, y, z)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm (x, y, z) trên C. Bằng trực giác, chúng ta thấy rằng xấp xỉ sẽ trở nên tốt hơn khi n lớn. Do đó chúng ta định nghĩa công sinh ra bởi trường lực $\mathbf{F}$ cụ thể là

$$\mathbf{W} = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] \cdot |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Định nghĩa 2.1 (xem Definition 13, [1]). Giả sử $\mathbf{F}$ là trường vectơ liên tục xác định trên đường cong trơn C cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$. Khi đó tích phân đường của trường vectơ $\mathbf{F}$ dọc theo đường cong C là

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Nhận xét 2.1. *Giả sử rằng* $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ *và đường cong* C *có phương trình tham số* $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in [a, b]$. *Khi đó, ta có*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$
$$= \int_C \left[P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t)\right] dt.$$

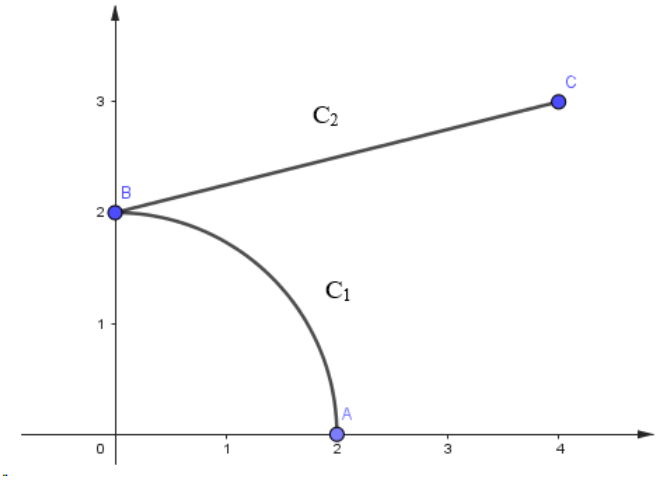
Ví dụ 2.1. Giả sử C là đường cong được cho bởi $C : \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$ và trường vectơ $\mathbf{F}$ cho bởi $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Ta có

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = e^{t^2-1}\mathbf{i} + t^5\mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}.$$

Theo Định nghĩa 2.1, tích phân đường của trường vectơ $\mathbf{F}$ sẽ được tính bởi:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(e^{t^3-1}\right)(2t) + \left(t^5\right)\left(3t^2\right)\right] dt \\ &= \int_0^1 \left(2te^{t^2-1} + 3t^7\right) dt \\ &= \frac{11}{8} - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.2. Tính tích phân đường của trường vectơ $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ trên đường cong C được tạo bởi một vòng cung của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ từ điểm $(2, 0)$ đến $(0, 2)$, nối với đoạn thẳng từ điểm $(0, 2)$ đến $(4, 3)$. Chúng ta thấy rằng $C = C_1 \cup C_2$, trong đó C_1 là một



Hình 10. Hình minh họa cho đường cong C

phần của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ từ điểm $(2, 0)$ đến điểm $(0, 2)$ và C_2 là đoạn thẳng từ điểm $(0, 2)$ đến điểm $(4, 3)$ (xem Hình 10). Theo Nhận xét 1.2, ta có thể tham số hóa đường cong C_1 như sau

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \end{cases}$$

trong đó $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó, chúng ta nhận được phương trình tham số $\mathbf{r}_1(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$ và đạo hàm của đường cong tham số cho bởi

$$\mathbf{r}_1'(t) = -2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}.$$

Do đó, chúng ta nhận được

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) = 4\cos^2 t\mathbf{i} + 4\sin^2 t\mathbf{j}.$$

Tương tự, theo Nhận xét 1.2, bằng cách tham số hóa đoạn thẳng C_2 từ $(0,2)$ đến $(4,3)$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_2(t) = (4t, t+2), \quad 0 \le t \le 1,\\
&\mathbf{r}_2'(t) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j},\\
&\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) = 16t^2\mathbf{i} + (t+2)^2\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Theo Định nghĩa 2.1, chúng ta có tích phân đường của trường vectơ $\mathbf{F}$ như sau:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_2\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}_1(t)\right)\cdot \mathbf{r}_1{}'(t)dt + \int_0^1 \mathbf{F}\left(\mathbf{r}_2(t)\right)\cdot \mathbf{r}_2{}'(t)dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4\cos^2 t\right)\left(-2\sin t\right) + \left(4\sin^2 t\right)\left(2\cos t\right)\right]dt + \int_0^1 \left[16t^2\cdot 4 + (t+2)^2\right]dt\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos^2 t\sin t + \sin^2 t\cos t\right) + \int_0^1 \left(65t^2 + 2t^2 + 4t\right)dt\\
&= 8\left(\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{65}{3}t^3 + 2t^2 + 4t\right)\Big|_0^1 = \frac{83}{3}.
\end{aligned}$$

2.2. Sử dụng định lý cơ bản của tích phân đường

Chúng ta đã biết một công thức quen thuộc thường được sử dụng trong phổ thông để tính giá trị tích phân xác định là công thức Newton-Leibniz cho bởi:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Sau đây, chúng ta giới thiệu một mở rộng công thức trên đối với trường hợp nhiều chiều với việc thay hàm số một biến $F'(x)$ bằng vectơ $\nabla f(\mathbf{x})$. Hơn nữa, chúng ta cũng biết rằng

$\nabla f(\mathbf{x})$ là một trường vectơ bảo toàn. Vì thế, tích phân của $\nabla f(\mathbf{x})$ được hiểu là tích phân đường của một trường vectơ. Kết quả này có tên gọi là định lí cơ bản của tích phân đường.

Định lý 2.1 (Định lí cơ bản của tích phân đường, xem Theorem 2, [1]). *Giả sử C là một đường cong trơn cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ và $f(\mathbf{x})$ là hàm khả vi sao cho $\nabla f(\mathbf{x})$ là hàm liên tục trên C. Khi đó, ta có*

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Nhận xét 2.2. Nếu f là hàm hai biến và C là đường cong phẳng với điểm bắt đầu $A\,(x_1, y_1)$ và điểm kết thúc $B\,(x_2, y_2)$ (xem Hình 11a) thì Định lý 2.1 trở thành

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

Nếu f là hàm ba biến và C là đường cong không gian nối điểm $A\,(x_1, y_1, z_1)$ tới điểm $B\,(x_2, y_2, z_2)$ (xem Hình 11b) thì ta có

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1).$$

(a) Đường cong C trong $\mathbb{R}^2$ (b) Đường cong C trong $\mathbb{R}^3$

Hình 11. Hình minh họa cho các đường cong C

Ví dụ 2.3. Xét trường vectơ $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ và đường cong C:

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t \right\rangle, 0 \le t \le 1.$$

Để tính tích phân $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ trên đường cong C đã cho, trước hết ta sẽ chứng minh trường vectơ $\mathbf{F}$ là trường bảo toàn. Định nghĩa 1.4 chỉ ra rằng, $\mathbf{F}$ là trường bảo toàn nếu tồn tại hàm vô hướng f sao cho $\mathbf{F} = \nabla f$. Thật vậy, xét hệ phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = xy^2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^2y. \tag{4}$$

Nguyên hàm hai vế của phương trình (3) theo biến x, ta có

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = \int xy^2 dx.$$

Do đó

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + g(y). \tag{5}$$

Đạo hàm hai vế của (5) theo biến y, ta được

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2y + g'(y). \tag{6}$$

So sánh phương trình (4) và (6) dễ dàng thấy được $g'(y) = 0$, tức là $g(y) = K$ với mọi y, trong đó K là hằng số. Vì vậy, hàm vô hướng f cần tìm là $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + K$. Mặt khác, ta có điểm đầu của đường cong C là $\mathbf{r}(0) = (0,1)$ và điểm cuối là $\mathbf{r}(1) = (2,1)$, nên theo Định lý cơ bản của tích phân đường, ta có

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2,1) - f(0,1) = 2 - 0 = 2.$$

Ví dụ 2.4 (Định luật bảo toàn năng lượng)**.** Xét một trường lực $\mathbf{F}$ di chuyển một chất điểm dọc theo một đường cong C cho bởi phương trình tham số $\mathbf{r}(t), a \le t \le b$, với $\mathbf{r}(a) = A$ là điểm đầu và $\mathbf{r}(b) = B$ là điểm cuối của đường cong C. Theo Định luật II Newton, lực $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ tại một điểm trên C có mối quan hệ với gia tốc $a(t) = f''(t)$ qua công thức:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t).$$

Vì thế, cơ năng sinh ra bởi lực $\mathbf{F}$ khi di chuyển chất điểm là

$$\begin{aligned}
W = \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\right] dt \\
&= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt \\
&= \frac{m}{2} \left[|\mathbf{r}'(t)|^2\right]_a^b = \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2\right).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$W = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(a)|^2,$$

với $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ là vận tốc của chất điểm.

Đại lượng $K(t) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2$ được biết đến là động năng của chất điểm. Chúng ta có thể viết lại công thức tính cơ năng sinh ra bởi lực $\mathbf{F}$ là $W = K(B) - K(A)$, trong đó $K(A), K(B)$ lần lượt là động năng của chất điểm tại điểm A và B.

Giả sử $\mathbf{F}$ là một trường bảo toàn, tức là ta có thể viết dưới dạng $\mathbf{F} = \nabla f$. Thế năng của chất điểm tại điểm (x, y, z) được xác định bởi $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, nên ta có $\mathbf{F} = -\nabla P$. Từ định lí cơ bản của tích phân đường, ta có

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\left[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))\right] \\ &= P(A) - P(B). \end{aligned}$$

Do đó, chúng ta nhận được kết quả sau:

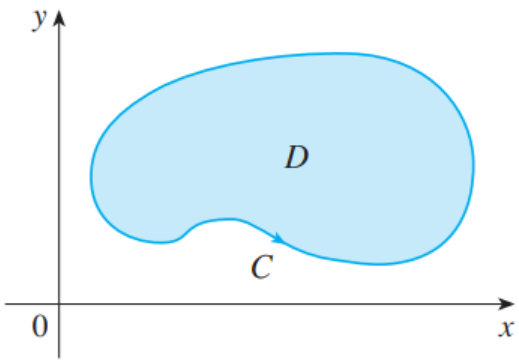
$$P(A) - P(B) = K(B) - K(A),$$

tức là

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B).$$

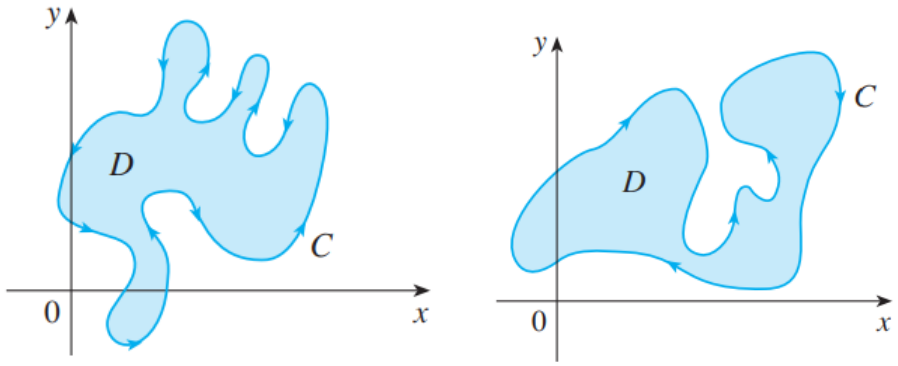
Tóm lại, kết quả trên chỉ ra rằng nếu một chất điểm được dịch chuyển từ một điểm A đến điểm B dưới tác dụng của một trường lực bảo toàn thì tổng động năng và thế năng của chất điểm không đổi theo thời gian. Đây được gọi là *Định luật bảo toàn năng lượng.*

2.3. Sử dụng định lý Green



Hình 12. Hình minh họa cho miền phẳng D.

Định lý Green đưa ra mối quan hệ giữa tích phân đường trên một đường cong kín đơn liên C và tích phân bội hai trên miền phẳng D được giới hạn bởi C (xem Hình 12). Chúng ta sử dụng quy ước hướng dương của một đường cong kín, đơn liên C là hướng mà nếu đi trên C sẽ thấy miền giới hạn bởi đường cong C sẽ nằm về bên tay trái. Vì vậy, nếu đường cong C được cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ thì miền giới hạn D luôn luôn nằm về bên trái của điểm $\mathbf{r}(t)$ (xem Hình 13a và Hình 13b).



(a) Hướng dương (b) Hướng âm

Hình 13. Hình minh họa cho hướng của các đường cong.

Định lý 2.2 (Định lí Green, xem [1], tr. 782)**.** *Giả sử rằng C là đường cong kín, đơn liên, định hướng dương, trơn từng khúc trong $\mathbb{R}^2$, D là miền phẳng giới hạn bởi đường cong C và trường vectơ $\mathbf{F}$ cho bởi*

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}.$$

Nếu các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên miền D thì

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Ngoài ra, chúng ta còn sử dụng ký hiệu $\oint_C Pdx + Qdy$ hay $\oint_C Pdx + Qdy$ để chỉ tích phân đường theo chiều dương của đường cong C.

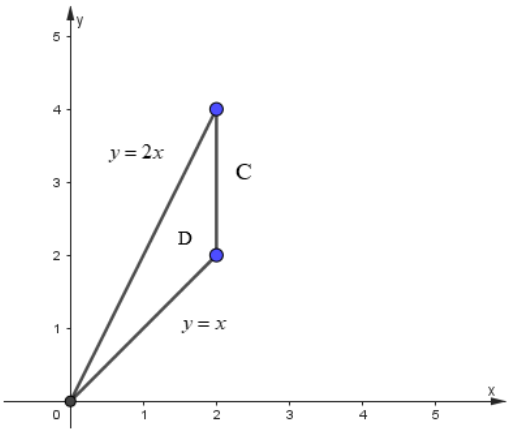
Chứng minh. Chứng minh của Định lý Green có thể tham khảo trong tài liệu [1] từ trang 782 đến 784. □

Ví dụ 2.5. Cho trường vectơ

$$\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$$

và C là tam giác có tọa độ các đỉnh lần lượt là $(0,0), (2,2)$ và $(2,4)$ (xem Hình 14). Tính tích phân

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



Hình 14. Tam giác có tọa độ các đỉnh lần lượt là $(0,0), (2,2)$ và $(2,4)$.

Ta thấy rằng miền D được xác định như sau:

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, x \le y \le 2x\}.$$

Theo Định lí Green, ta có

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \right] dA \\
&= \int_0^2 \int_x^{2x} (4xy - 2xy) dy dx \\
&= \int_0^2 \int_x^{2x} (2xy) dy dx \\
&= \int_0^2 \left(xy^2\right)\Big|_x^{2x} dx \\
&= \int_0^2 3x^3 dx = 12.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.6. Cho trường vectơ

$$\mathbf{F}(x,y) = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j}$$

và C là đường tròn:

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Tính tích phân $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Theo Nhận xét 1.2, ta tham số hóa miền D giới hạn bởi đường tròn C như sau

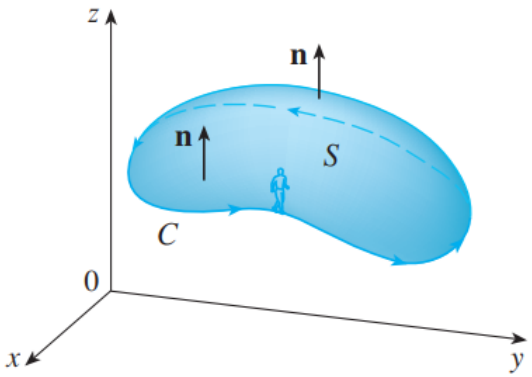
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

trong đó $\varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, 2]$. Sử dụng Định lí Green, ta thu được

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C y^3 dx - x^3 dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3)\right] dA \\ &= \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dA \\ &= \iint_D -3\left(x^2 + y^2\right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-3r^2) r dr d\varphi \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = -24\pi.\end{aligned}$$

2.4. Định lý Stokes

Định lý Stokes được đặt tên theo nhà vật lý toán học người Ireland George Stokes (1819–1903). Stokes là giáo sư tại Đại học Cambridge và đặc biệt được chú ý vì những nghiên cứu về dòng chảy và ánh sáng. Định lí Stokes có thể được xem là định lí Green trong không gian có số chiều cao hơn. Nếu như định lí Green nói lên mối quan hệ giữa tích phân hai lớp trên một miền phẳng D với tích phân đường theo đường cong phẳng là biên của D, thì định lí Stokes nói lên mối quan hệ giữa tích phân mặt trên một mặt S với tích phân đường theo đường cong là biên của mặt S (đường cong trong không gian).



Hình 15. Mặt định hướng S với vectơ chỉ phương $\mathbf{n}$.

Định nghĩa 2.2 ([1], tr. 789)**.** Xét trường vectơ sau trên $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

với các hàm thành phần P, Q và R tồn tại đạo hàm riêng. Khi đó, curl của $\mathbf{F}$ cũng là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và được xác định bởi

$$\text{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

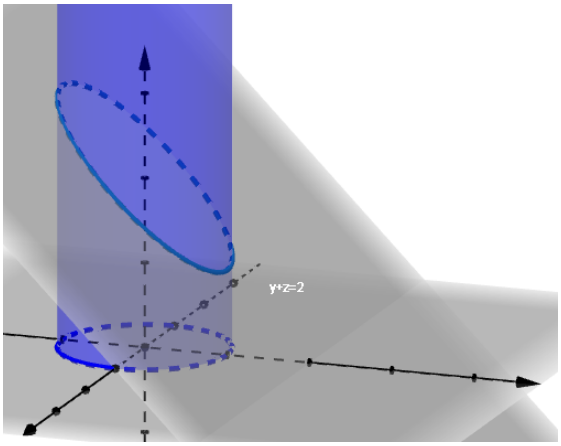
Định lý 2.3 (Định lí Stokes, xem [1], tr. 818)**.** *Cho S là một mặt trơn từng mảnh với biên là đường cong đơn, đóng, trơn từng khúc, định hướng dương C. Cho $\mathbf{F}$ là một trường vectơ với các thành phần có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở trong $\mathbb{R}^3$ chứa S. Khi đó, ta có*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ví dụ 2.7. Tính tích phân $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, trong đó

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

và C là giao tuyến của mặt phẳng $y + z = 2$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, chiều dương của C được chọn là chiều ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía trên. Chọn S là miền elip trên



Hình 16. C là giao tuyến của mặt $y + z = 2$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

mặt phẳng $y + z = 2$ được bao bởi C. Nếu chúng ta định hướng S là lên trên thì C có hướng dương. Trước tiên, ta tính được

$$\text{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (1 + 2y)\mathbf{k}.$$

Theo Định lí Stokes, ta có

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1+2t)dA.$$

Dễ dàng thấy được hình chiếu D của mặt S lên trên mặt phẳng Oxy là hình tròn

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Tham số hóa miền D, ta nhận được

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

trong đó $\varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r\sin\varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3}\sin\varphi \right) \Big|_0^1 d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi + 0 = \pi. \end{aligned}$$

KẾT LUẬN

Trong bài viết này, mục đích của chúng tôi là tìm hiểu đôi nét về tích phân đường của trường vectơ và các phương pháp để tính tích phân trường vectơ. Với mục đích này, chúng tôi trình bày một cách có hệ thống một số khái niệm cơ bản về trường vectơ, định nghĩa đường tham số, mặt tham số và giới thiệu công thức tham số hóa của một số đường, mặt quen thuộc. Sau đó, chúng tôi hệ thống hóa về các phương pháp tính tích phân đường ở trong Mục . Chúng tôi hy vọng rằng bài báo này sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên Khoa Toán.

Lời cảm ơn

Các tác giả chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Phương Đông đã có những góp ý và chỉnh sửa để cải thiện bản thảo của bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. Stewart, *Essential Calculus: Early Transcendentals, 2nd edition*, Brooks Cole, 2012.

KỸ THUẬT KHỞI TẠO CÂU HỎI: MỞ RỘNG KHẢ NĂNG TƯ DUY VÀ KHÁM PHÁ TRONG QUÁ TRÌNH HỌC TẬP

Bùi Thị Huyền Trang, Phạm Thu Thảo, Nguyễn Như Quỳnh, Nguyễn Bá Khang - K46B SPT
Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2

Tóm tắt. *Trong bài viết này, nhóm tác giả giới thiệu về Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi, một công cụ quan trọng trong quá trình học tập và giảng dạy. Kỹ thuật này khuyến khích học sinh đặt câu hỏi, tạo ra sự tò mò khám phá và nâng cao khả năng tư duy sáng tạo. Bài báo trình bày khái niệm, vai trò và các quy tắc cơ bản của Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi. Từ đó, nhóm tác giả đề xuất việc áp dụng Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi trong dạy và học Toán ở phổ thông.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong thời đại hiện nay, hệ thống giáo dục đang đối mặt với một thách thức lớn: *làm thế nào để học sinh không chỉ học kiến thức mà còn phát triển khả năng tư duy sáng tạo và khám phá*. Trong nhiều trường học, quá trình giảng dạy vẫn tập trung vào việc truyền đạt thông tin từ giáo viên đến học sinh, trong khi việc khuyến khích học sinh tự đặt câu hỏi và khám phá kiến thức theo cách riêng của họ vẫn chưa được đặt lên hàng đầu. Điều này dẫn đến tình trạng học sinh chỉ biết "nhận" kiến thức mà ít có khả năng "tạo ra" kiến thức mới, dẫn đến học sinh thường hiểu kiến thức theo cách hẹp hơn, thiếu tính ứng dụng và không thế thấy được mối liên hệ giữa các khía cạnh khác nhau của kiến thức.

Trong bối cảnh này, Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi đã nổi lên như một phương pháp tiềm năng để giải quyết một phần vấn đề trên. Kỹ thuật này không chỉ đòi hỏi học sinh đặt câu hỏi một cách chủ động mà còn hướng họ đến việc tư duy sáng tạo, khám phá thông qua việc đặt những câu hỏi có tính thách thức và phản chứng. Việc áp dụng Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi trong quá trình học tập có tiềm năng mở rộng không chỉ khả năng tư duy của học sinh mà còn mở ra cánh cửa cho việc khám phá kiến thức mới, thúc đẩy tính hiểu biết sâu rộng và phát triển kỹ năng tự học suốt đời.

Chúng ta hãy xem xét một bài toán về các tam giác đồng dạng:
Giả sử chúng ta có hai tam giác ABC và DEF, biết rằng $\widehat{A} = \widehat{D} = 60°, \widehat{B} = \widehat{E} = 50°$. Hãy chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF.

Truyền thống. Trong phương pháp truyền thống, giáo viên thường sẽ trình bày công thức và quy tắc về tam giác đồng dạng, sau đó cung cấp một ví dụ để học sinh thực hiện tính toán.

Áp dụng Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi. Thay vì điều này, giáo viên có thể cho học sinh đặt các câu hỏi khám phá và khuyến khích học sinh suy nghĩ sâu hơn, tìm hiểu về lý do tại

sao tam giác đồng dạng có thể xảy ra:

1. "Góc A bằng góc D và góc B bằng góc E. Tại sao điều này gợi ý rằng tam giác ABC có thể đồng dạng với tam giác DEF? Liệu việc góc A bằng góc D có ý nghĩa gì trong việc chứng minh hai tam giác đồng dạng?"

2. "Chúng ta có thể xem xét các tam giác ABC và DEF là đồng dạng dựa trên thông tin về góc mà không cần biết gì thêm về độ dài của các cạnh không? Tại sao điều này có thể xảy ra?"

3. "Tại sao chúng ta không cần biết góc C và góc F để chứng minh hai tam giác đồng dạng trong trường hợp này? Liệu thông tin về góc A, góc D, góc B, và góc E là đủ để chứng minh đồng dạng?"

4. "Có công thức hay quy tắc nào liên quan đến hai tam giác đồng dạng dựa trên gócgóc mà chúng ta có thể áp dụng vào bài toán này?"

5. "Làm thế nào để xác định tam giác ABC và tam giác DEF là hai tam giác đồng dạng một cách chắc chắn và logic?"

6. "Tại sao trong bài toán trên, chỉ cần biết rằng các góc tương ứng bằng nhau là đủ để chúng ta kết luận rằng hai tam giác đồng dạng?"

Bằng cách khuyến khích học sinh tự đặt ra các câu hỏi và suy nghĩ về cơ sở lý thuyết, học sinh sẽ có cơ hội hiểu sâu hơn về tại sao các tam giác đồng dạng có thể tồn tại và cách kiểm tra chúng. Điều này không chỉ giúp các em nhớ lâu hơn mà còn phát triển khả năng tư duy logic và sáng tạo trong việc giải quyết vấn đề toán học.

Trong bài báo này, nhóm tác giả sẽ trình bày về Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi và cách áp dụng nó để mở rộng tư duy và thúc đẩy quá trình khám phá trong quá trình học tập. Bằng việc nêu bật tầm quan trọng của việc khởi tạo câu hỏi trong quá trình học tập, hy vọng chúng tôi sẽ đóng góp vào việc thúc đẩy sự thay đổi trong phương pháp giảng dạy và quá trình học tập hiện tại với mục tiêu phát triển toàn diện cho các học sinh.

2. KỸ THUẬT KHỞI TẠO CÂU HỎI

2.1. Lịch sử

Nguồn gốc của Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi

Trên thực tế, có rất nhiều cuốn sách, trang báo và các nguồn tài liệu nói về kĩ thuật, vai trò và ý nghĩa của Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi. Sau đây, chúng tôi xin giới thiệu tới bạn đọc lịch sử của Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi. Nội dung chính của phần này được tham khảo ở tài liệu số [1] và [2].

Quá trình phát triển Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi (QFT-Question Formulation Technique) không diễn ra trong khuôn khổ một dự án nghiên cứu ở trường học, một hội thảo chuyên

môn ở trường đại học hoặc một tổ chức tư vấn chính sách. Dưới đây là tóm tắt lịch sử phát triển của QFT.

Trước năm 1980:

Tầm quan trọng của việc đặt câu hỏi được nhận thức từ các bậc cha mẹ trong cộng đồng thu nhập thấp tại Massachusetts. Trong bối cảnh mà việc đặt câu hỏi thường bị bỏ qua, tác giả Luz Santana và Dan Rothstein đã nhận thức tầm quan trọng của việc này qua việc lắng nghe câu chuyện của những người cha mẹ trong cộng đồng. Họ đã cảm nhận những khó khăn mà những người này phải đối mặt khi cố gắng tham gia vào các tình huống quan trọng.

Cuối những năm 1980:

Hai tác giả, Luz Santana và Dan Rothstein tham gia vào chương trình ngăn chặn bỏ học do Quỹ Annie E. Casey tài trợ. Trong quá trình này, họ nghe thấy các bậc phụ huynh thể hiện rằng họ không biết cách đặt câu hỏi tại các cuộc họp tại trường dẫn đến việc họ không thể tham gia vào việc quyết định về học tập của con cái mình.

Những năm 1990:

Luz Santana và Dan Rothstein nhận thấy việc cung cấp các câu hỏi sẵn có từ họ chỉ làm cho phụ huynh lệ thuộc hơn. Họ nhận thấy rằng tầm quan trọng không chỉ là việc có các câu hỏi cụ thể, mà là việc biết cách tạo ra và sử dụng câu hỏi của chính mình.

Cuối những năm 1990-2000:

Hai tác giả tập trung vào việc phát triển phương pháp giúp người dân tại cộng đồng có khả năng tạo ra câu hỏi. Họ hiểu rằng việc này không chỉ liên quan đến việc biết đặt câu hỏi mà còn là việc giúp người dân phát triển khả năng tự tư duy và tự phát triển.

Hiện nay:

Luz Santana và Dan Rothstein đã thành lập "The Right Question Institute" để đào tạo người làm việc trong nhiều lĩnh vực và cộng đồng trên khắp Hoa Kỳ và thế giới về QFT. Kỹ thuật này đã giúp người dân không chỉ ở cộng đồng có thu nhập thấp, mà còn ở nhiều lĩnh vực khác, phát triển khả năng tư duy và tham gia hiệu quả vào việc quyết định.

Mở rộng áp dụng kỹ thuật khởi tạo câu hỏi vào hệ thống giáo dục

Trong quá trình làm việc với Hệ thống trường công lập Boston, Giáo sư Richard Murane (Trường Sau đại học về Giáo dục Harvard) đã giới thiệu Chiến lược Câu hỏi Đúng cho giáo viên và đội ngũ quản trị như một công cụ để phân tích thành tích học tập của học sinh. Mục tiêu của họ là cải thiện hoạt động giảng dạy trong lớp học và đáp ứng tốt hơn nhu cầu của học sinh. Sau khi chứng kiến sự thành công, họ đã quyết định giới thiệu QFT cho nhiều giáo viên hơn thông qua các hội nghị quốc gia.

2.2. Khái niệm kỹ thuật khởi tạo câu hỏi

Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi là một phương pháp giáo dục giúp khuyến khích sự tò mò và khám phá của học sinh thông qua việc học cách tạo ra và đặt câu hỏi. Kỹ thuật Khởi

tạo Câu hỏi là "một tiến trình từng bước một, được thiết kế đem lại sự thuận tiện cho việc đặt ra nhiều câu hỏi. Kĩ thuật này còn làm được nhiều hơn thế - nó đưa học sinh trải qua một quá trình nghiêm ngặt, trong đó các em suy nghĩ sâu sắc hơn về chính các câu hỏi của mình, sàng lọc và thiết lập thứ tự ưu tiên trong việc sử dụng chúng. Khi trải qua các bước của kỹ thuật QFT, ngoài việc xây dựng câu hỏi, học sinh còn thực hành ba năng lực tư duy quan trọng cơ bản: tư duy phân nhánh, tư duy hội tụ, và siêu nhận thức".

Ba năng lực tư duy riêng biệt:

- Tư duy phân nhánh (**Divergent thinking**): Khả năng tạo ra nhiều ý tưởng, suy nghĩ bao quát và sáng tạo.
- Tư duy hội tụ (**Convergent thinking**): Khả năng phân tích, tổng hợp thông tin và ý tưởng để đi đến một câu trả lời hoặc kết luận.
- Siêu nhận thức (**Metacognition**): Khả năng suy nghĩ về cách suy nghĩ và học tập riêng của mọi người.

Mỗi năng lực này, tự thân chúng đã là nguồn tài nguyên quý giá cho bất kỳ học sinh nào. Khi kết hợp với nhau, hiệu lực riêng biệt của chúng được nhân lên gấp nhiều lần.

2.3. Vai trò của kỹ thuật khởi tạo câu hỏi

Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi có tầm quan trọng đáng kể trong quá trình giáo dục. Kỹ thuật này tạo môi trường học tập tương tác, giúp học sinh thảo luận và giao tiếp với nhau. Điều này giúp học sinh chia sẻ quan điểm, lắng nghe ý kiến khác nhau và phát triển kỹ năng giao tiếp. Bên cạnh đó, Kỹ thuật này cũng khuyến khích tư duy sáng tạo và khám phá của học sinh. Bằng cách đặt câu hỏi phù hợp, giáo viên kích thích học sinh suy nghĩ sâu hơn và tìm kiếm giải pháp sáng tạo cho các vấn đề. Ngoài ra, Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi còn giúp xây dựng khả năng phân tích và suy luận của học sinh. Bằng cách đặt câu hỏi khéo léo, giáo viên khuyến khích học sinh phân loại thông tin, so sánh, đánh giá và đưa ra những kết luận logic. Điều này giúp xây dựng khả năng tư duy phản biện và logic của học sinh. Đồng thời, Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi cũng cung cấp cơ hội cho giáo viên đánh giá kiến thức và tiến độ học sinh. Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi cũng tạo cảm hứng và động lực học tập cho học sinh.

Câu hỏi thú vị và kích thích tưởng tượng giúp học sinh quan tâm và tích cực tham gia vào quá trình học. Điều này tạo ra môi trường học tập thú vị và động lực, giúp học sinh tiếp thu kiến thức một cách hiệu quả. Kỹ thuật QFT giúp học sinh phát triển kỹ năng đặt câu hỏi chất lượng và phản xạ tư duy sâu sắc. Thông qua quá trình này, học sinh không chỉ tăng cường khả năng nắm bắt thông tin mà còn khám phá, tìm hiểu và tự điều chỉnh quá trình học của mình. Kỹ thuật QFT đặc biệt hữu ích trong việc khai thác kiến thức tiềm năng của học sinh và khuyến khích họ tham gia tích cực vào quá trình học tập.

2.4. Các quy tắc khởi tạo câu hỏi

Các Quy tắc Khởi tạo Câu hỏi đóng vai trò quan trọng trong quá trình tư duy mở và giúp học sinh giảm bớt sự lo lắng khi phải tạo ra câu hỏi. Điều này có thể là một trải nghiệm kích

thích cho học sinh khi họ chuyển từ việc trả lời câu hỏi của người khác sang việc tự tạo ra câu hỏi.

Các Quy tắc Khởi tạo Câu hỏi được bắc giàn (scaffolding) cẩn thận và hỗ trợ nhau . Mỗi quy tắc mang tính chất bổ trợ và làm cho quy tắc khác trở nên mạnh mẽ hơn, giúp học sinh tạo ra các câu hỏi của riêng mình. Qua từng quy tắc, chúng ta có thể thấy vai trò quan trọng của chúng trong việc cho phép học sinh thực hiện tư duy phân nhánh.

Quy tắc 1: Hỏi nhiều câu hỏi nhất có thể

Đây là một yếu tố quan trọng trong quá trình khởi tạo câu hỏi. Tuy nhiên, không phải tất cả các học sinh đều sẵn lòng hoặc có khả năng đặt câu hỏi một cách tự nhiên. Đó là lúc vai trò của giáo viên trở nên quan trọng, để tạo điều kiện cho học sinh đưa ra các câu hỏi và khám phá. Quy tắc Hỏi nhiều nhất có thể là một quy tắc quan trọng, nhưng cần kết hợp với các quy tắc khác để tạo điều kiện cho sự phát triển tư duy và tạo ra một môi trường học tập sáng tạo.

Quy tắc 2: Không dừng lại để thảo luận hay phán xét hoặc trả lời bất kỳ câu hỏi nào

Quy tắc 1 trao cho học sinh quyền được hỏi; quy tắc 2 tước đi quyền thảo luận về các câu hỏi, trong một khoảng thời gian ngắn. Các quy tắc đầu là một lời khuyên mang tính chủ động, quy tắc thứ hai là một mệnh lệnh cấm mang tính bị động, với ba phần tách biệt.

- *Không dừng lại để thảo luận*: Một câu hỏi được đưa ra nhưng không ai được phép trả lời, thảo luận hoặc chia sẻ bất kỳ suy nghĩ nào mà có thể đã khơi gợi, không phán xét hoặc trả lời câu hỏi trong quá trình khởi tạo câu hỏi giúp tạo ra một quá trình tư duy mở và giảm bớt sự lo lắng của học sinh. Quy tắc này yêu cầu học sinh chỉ tiếp tục đặt câu hỏi, mở rộng tư duy và khám phá nhiều khía cạnh khác nhau.

- *Không phán xét*: quy tắc không phán xét trong quá trình khởi tạo câu hỏi có tác dụng tạo ra một môi trường an toàn và loại bỏ sự đánh giá tiêu cực. Nó giúp học sinh tự tin hơn khi đặt câu hỏi và khám phá thay vì đánh giá hay phán xét câu hỏi của học sinh, quy tắc này khuyến khích sự tôn trọng và khám phá ý kiến đa dạng.

- *Không trả lời*: trong quá trình khởi tạo câu hỏi giúp mở ra và không đóng lại các ý tưởng. Giai đoạn này yêu cầu sự tập trung vào việc đặt câu hỏi, không trả lời, để tạo điều kiện cho tư duy phân nhánh.

Ba quy tắc cấm này - không dừng lại để thảo luận, không phán xét, không trả lời - tạo ra không gian an toàn và dư địa cho quá trình khởi tạo câu hỏi diễn ra.

Quy tắc 3: Viết mọi câu hỏi ra giấy một cách chính xác, như cách mà nó đã nảy ra trong đầu

Quy tắc này là việc thay đổi câu hỏi của học sinh để làm cho chúng phù hợp hơn với mục đích dạy và học đã được thực hiện trong suốt nhiều thế hệ. Tuy nhiên, quy tắc này có thể làm suy yếu sự tự tin của học sinh và không cho phép họ sở hữu các câu hỏi của mình. Quy

tắc 3 tôn trọng và xác thực câu hỏi của học sinh, cho phép tất cả các tiếng nói đều được lắng nghe và tôn trọng.

Quy tắc 4: Biến đổi mọi mệnh đề khẳng định thành các câu hỏi

Quy tắc nhấn mạnh việc phân biệt giữa các mệnh đề tưởng là câu hỏi và các câu hỏi thực sự. Thói quen của học sinh đưa ra các tuyên bố dưới dạng câu hỏi có thể được điều chỉnh thông qua quy tắc này. Học sinh cần hiểu nguyên lý của quy tắc 4 để tách riêng các mệnh đề và tạo ra các câu hỏi. Quy tắc này tập trung vào việc xây dựng câu hỏi và suy nghĩ dưới dạng câu hỏi thay vì các tuyên bố.

2.5. Các bước khởi tạo câu hỏi

Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi là một phương pháp tiếp cận đơn giản nhưng chặt chẽ. Từng bước của tiến trình này được thiết kế để giúp học sinh tạo ra, cải thiện và hình thành các chiến lược sử dụng các câu hỏi của chính các em. Nội dung chính của phần này được tham khảo ở tài liệu số [3].

Bước 1: Thiết kế một phần Tiêu điểm Câu hỏi (QFocus)

QFocus là một yếu tố để khơi mào, kích thích các câu hỏi của học sinh; nó đóng vai trò hội tụ các luồng suy nghĩ để học sinh đặt câu hỏi của mình. QFocus thường được giáo viên chọn và có thể là một câu tuyên bố, một cụm từ, một hình ảnh. QFocus có thể là bất cứ thứ gì, miễn là nó không phải câu hỏi, và nó có liên quan đến nội dung hoặc các kết quả học tập mong đợi. Một QFocus tốt cần đơn giản, rõ ràng và khuyến khích tư duy phân nhánh, khác biệt.

Bước 2: Giới thiệu Quy tắc Khởi tạo Câu hỏi

- Giới thiệu với học sinh bốn quy tắc thiết kế của tiến trình khởi tạo câu hỏi.
- Nhắc học sinh tuân thủ các quy tắc trên mỗi khi sử dụng kỹ thuật QFT.
- Hướng dẫn để học sinh tư duy về các quy tắc, để cho các em thảo luận một trong các câu hỏi dưới đây:
  - Đâu là những khó khăn gặp phải khi tuân thủ Quy tắc Khởi tạo Câu hỏi?
  - Quy tắc nào khó tuân thủ nhất?

Tránh việc nói cho học sinh biết hoặc đặt tên những gì các em chia sẻ khi nói về các khó khăn hay giá trị của các quy tắc.

Bước 3: Giới thiệu Tiêu điểm Câu hỏi (QFocus) và khởi tạo các câu hỏi

- Trình bày phần QFocus mà không đưa ra thêm bất kì thông tin nào khác, hạn chế tối đa việc đưa ra các giải thích bổ sung.
- Giáo viên trình bày QFocus cho học sinh và yêu cầu học sinh tuân theo các quy tắc khởi tạo câu hỏi để tạo danh sách câu hỏi của riêng mình.
- Học sinh đánh số các câu hỏi. Bước này giúp học sinh tư duy phân nhánh. Học sinh có thể làm việc cá nhân hoặc theo nhóm để tạo ra câu hỏi của mình

Bước 4: Chuyển đổi các câu hỏi

- Học sinh làm việc với những câu hỏi mà các em đã tạo ra. Bước này giúp học sinh tư duy bậc cao với những câu hỏi của chính các em, xác định những loại câu hỏi khác nhau gợi ra những loại thông tin và câu trả lời khác nhau.

- Học sinh xem xét và phân loại các câu hỏi mà các em đã đưa ra thành hai loại: câu hỏi đóng và câu hỏi mở. Các câu hỏi đóng (Closed – end) có thể trả lời "có" hoặc "không", hoặc trả lời bằng một đáp án ngắn gọn. Các câu hỏi mở (Open – ended) cần tới sự giải thích và không thể trả lời "có" hoặc "không", cũng như bằng một đáp án ngắn gọn. Các câu hỏi đóng đánh dấu chúng bằng chữ C, các câu hỏi mở đánh dấu chúng bằng chữ O.

- Giáo viên thảo luận với học sinh về ưu điểm và nhược điểm của mỗi loại câu hỏi và khuyến khích học sinh cải thiện các câu hỏi của mình để đảm bảo chúng là câu hỏi mở và mang tính khám phá cao.

- Chuyển đổi các câu hỏi từ dạng này sang dạng khác. Học sinh đổi một câu hỏi đóng thành một câu hỏi mở. Học sinh chuyển đổi một câu hỏi mở thành một câu hỏi đóng.

Bước 5: Thiết lập thứ tự ưu tiên cho các câu hỏi

- Các chỉ dẫn để xác định thứ tự ưu tiên cho các câu hỏi cần đặt ra giúp học sinh liên kết trở lại với mục tiêu giảng dạy ban đầu và lập kế hoạch sử dụng các câu hỏi. Bước này giúp học sinh tư duy hội tụ. Mặc dù chúng tôi đề xuất con số "3", tuy nhiên số lượng ưu tiên phù hợp cho mỗi bài học có thể quyết định theo ý muốn. Dưới đây là một số ví dụ về cách hướng dẫn học sinh thiết lập thứ tự ưu tiên:

  – Hãy lựa chọn 3 câu hỏi mà em cho rằng quan trọng nhất.

  – Chọn những câu hỏi sẽ hỗ trợ cho bài nghiên cứu của em.

  – Xác định những câu hỏi liên quan đến thí nghiệm của em.

  – Chọn các câu hỏi có khả năng dẫn dắt quá trình đọc và viết của em.

  – Lựa chọn những câu hỏi mà em tin rằng có thể trả lời dựa trên tài liệu đã đọc.

- Sau khi học sinh đã thảo luận xong, các em cần thảo luận và chia sẻ lý do tại sao lại quyết định ưu tiên những câu hỏi đó và vị trí của những câu hỏi đó trong danh sách chung. Học sinh được khuyến khích xác định các nguồn thông tin liên quan đến nghiên cứu của mình. Giáo viên có thể hỗ trợ học sinh trong việc xác định và truy cập các tài liệu thích hợp để giải đáp câu hỏi.

Bước 6: Thảo luận về những bước tiếp theo (tùy chọn)

Những câu hỏi đó sẽ được sử dụng như thế nào? Những bước tiếp theo cần được nhất quán với các phương pháp sư phạm mà bạn đã lên kế hoạch. Đối với học sinh, việc thảo luận

này cung cấp thêm cho các em cái nhìn tổng quan về thách thức mà những câu hỏi các em có thể sử dụng. Học sinh có thể sử dụng sách giáo trình, sách tham khảo, bài báo, tài liệu trực tuyến...

Bước 7: Chiêm nghiệm

Học sinh cần được chiêm nghiệm:

- Em đã học được gì?
- Em sẽ ứng dụng những điều mình đã học như thế nào?

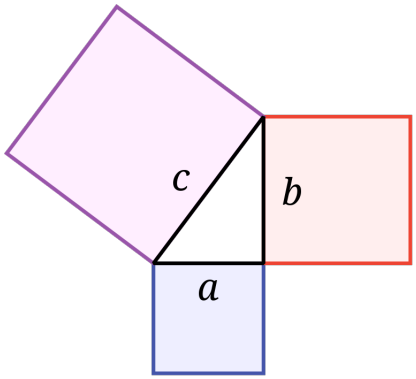
Bước này giúp học sinh tư duy siêu nhận thức về cách mà các em đã sử dụng các câu hỏi để học và chiêm nghiệm về những suy nghĩ mới mà các em có thể vừa mới phát triển.

3. VẬN DỤNG KỸ THUẬT KHỞI TẠO CÂU HỎI TRONG DẠY HỌC TOÁN

3.1. Ví dụ minh họa vận dụng kỹ thuật khởi tạo câu hỏi để dạy học sinh về Định lý Pytago

Bước 1: Thiết kế một phần Tiêu điểm Câu hỏi (QFocus)

Giáo viên chọn một hình vẽ biểu diễn một tam giác vuông với các cạnh được đánh số a, b và c. Hình ảnh này sẽ tạo sự tò mò cho học sinh về mối quan hệ giữa các cạnh của tam giác vuông và cách áp dụng định lý Pytago.



Định lý Pytago (nguồn: Wikipedia).

Bước 2: Giới thiệu quy tắc khởi tạo câu hỏi

Giới thiệu với học sinh bốn quy tắc thiết yếu của tiến trình khởi tạo câu hỏi:

- Hỏi nhiều câu hỏi nhất có thể.
- Không dừng lại để thảo luận, phán xét hoặc trả lời bất kỳ câu hỏi nào.
- Viết mọi câu hỏi ra giấy một cách chính xác, như cách mà nó đã được nói ra.

- Biến đổi mọi mệnh đề khẳng định thành các câu hỏi.

Hướng dẫn để học sinh tư duy về các quy tắc, để cho các em thảo luận một trong những câu hỏi dưới đây:

- Đâu là những khó khăn gặp phải khi tuân thủ Quy tắc Khởi tạo Câu hỏi?
- Quy tắc nào khó tuân thủ nhất?

Bước 3: Giới thiệu Tiêu điểm Câu hỏi (QFocus) và khởi tạo các câu hỏi

Giáo viên trình bày phần Qfocus (đã chọn ở bước 1) mà không đưa thêm bất cứ thông tin nào khác. Học sinh tạo ra một danh sách các câu hỏi của bản thân. Học sinh đánh số cho mỗi câu hỏi đó. Học sinh có thể tạo ra danh sách các câu hỏi như sau:

1. Tại sao được gọi là Định lý Pytago?
2. Ai là người đặt ra và chứng minh Định lý Pytago ban đầu?
3. Định lý Pytago được đặt tên theo ai và tại sao?
4. Nếu chúng ta biết độ dài hai cạnh góc vuông, làm cách nào để tính độ dài cạnh huyền?
5. Nếu biết độ dài của cạnh a và cạnh b, làm thế nào để chứng minh rằng cạnh huyền c phải có một giá trị cụ thể?
6. Định lý Pythago nói gì về mối quan hệ giữa các cạnh của một tam giác vuông?
7. Có thể áp dụng Định lý Pytago cho bất kỳ tam giác nào hay chỉ cho tam giác vuông?
8. Định lý Pytago là gì và cách chứng minh nó?
9. Trong các bài toán thực tế, chúng ta có thể sử dụng Định lý Pytago để giải quyết những vấn đề gì?
10. Tại sao Định lý Pytago chỉ áp dụng cho tam giác vuông, mà không áp dụng cho tam giác không vuông?

. . . . . .

Bước 4: Chuyển đổi các câu hỏi

Dựa trên danh sách câu hỏi ở Bước 3, chúng ta tiến hành như sau:

1. Giáo viên giới thiệu định nghĩa về câu hỏi đóng và câu hỏi mở.
   - Một câu hỏi đóng (closed – ended) có thể trả lời bằng một từ như có hoặc không hoặc một (cụm) từ đơn giản.

     Ví dụ, câu hỏi "Có thể áp dụng Định lý Pytago cho bất kỳ tam giác nào hay chỉ cho tam giác vuông?" có thể trả lời bằng "có" hoặc "không".

– Một câu hỏi mở (open – ended) là các câu hỏi có yêu cầu sự diễn giải, không thể trả lời "có" hoặc "không" và đòi hỏi một câu trả lời dài hơn. Ví dụ, câu hỏi: "Định lý Pytago là gì và cách chứng minh nó?", "Nếu chúng ta biết độ dài hai cạnh góc vuông, làm cách nào để tính độ dài cạnh huyền?"...

Tiếp đó, giáo viên hướng dẫn học sinh rà soát lại danh sách các câu hỏi mà các em đã tạo ra, đáng dấu các câu hỏi đóng bằng chữ "C" (closed – ended) và câu hỏi mở bằng chữ "O" (open – ended). Như vậy các câu hỏi ở bước 2 chỉ có câu hỏi thứ 7 là câu hỏi đóng (được đánh dấu bằng chữ "C") còn các câu hỏi còn lại là câu hỏi mở (được đánh dấu bằng chữ "O").

2. Giáo viên điều phối học sinh thảo luận về ưu điểm và nhược điểm của câu hỏi đóng và câu hỏi mở. Học sinh có thể thảo luận trong nhóm nhỏ và báo cáo lại kết quả, hoặc cả lớp cùng thảo luận chung.

3. Chuyển đổi các câu hỏi từ loại này sang loại khác.

   – Học sinh chọn ít nhất một câu hỏi đóng từ danh sách câu hỏi ở Bước 2 và cố gắng biến đổi nó thành một câu hỏi mở. Ví dụ, câu hỏi đóng "Có thể áp dụng Định lý Pytago cho bất kỳ tam giác nào hay chỉ cho tam giác vuông?" có thể được biến đổi thành câu hỏi mở "Làm thế nào Định lý Pythago áp dụng cho tam giác thường?"

   – Học sinh cũng thử chuyển đổi ít nhất một câu hỏi mở thành câu hỏi đóng. Ví dụ, câu hỏi mở "Nếu chúng ta biết độ dài hai cạnh góc vuông, làm cách nào để tính độ dài cạnh huyền?" có thể được biến đổi thành câu hỏi đóng "Độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông có thể được tính dựa trên độ dài của hai cạnh góc vuông không?"

Kết quả của bước này là giúp học sinh thấy rõ sự khác biệt giữa các loại câu hỏi, cải thiện kỹ năng sáng tạo câu hỏi và thúc đẩy sự tư duy phân nhánh để khám phá nhiều khía cạnh khác nhau của Định lý Pytago.

Bước 5. Thiết lập thứ tự ưu tiên cho các câu hỏi

Sau khi đã chuyển đổi các câu hỏi và hiểu rõ hơn về các loại câu hỏi đóng và câu hỏi mở trong Bước 4, chúng ta sẽ tiến hành thiết lập thứ tự ưu tiên cho các câu hỏi. Các em có khoảng 5 phút để sắp xếp thứ tự ưu tiên. Quá trình này có thể phát triển như sau:

1. Giáo viên thông báo rằng học sinh sẽ thiết lập thứ tự ưu tiên bằng cách chọn ba câu hỏi ưu tiên trên tiêu chí mà giáo viên đã thông báo, ví dụ:

   – Chọn ba câu hỏi quan trọng nhất.

   – Chọn ba câu hỏi mà em quan tâm nhất.

– Chọn ba câu hỏi sẽ giúp các em thiết kế dự án nghiên cứu của mình một cách tốt nhất.

2. Học sinh xem lại danh sách câu hỏi và thảo luận nên chọn câu nào. Dựa vào tiêu chí có thể lựa chọn chọn 3 câu hỏi mà họ cho rằng quan trọng nhất trong việc khám phá Định lý Pythago và áp dụng nó vào các bài toán. Học sinh có thể xác định những câu hỏi như sau làm câu hỏi ưu tiên:

   – Nếu chúng ta biết độ dài hai cạnh góc vuông, làm thế nào để tính độ dài cạnh huyền?

   – Định lý Pytago là gì và cách chứng minh nó?

   – Có thể áp dụng Định lý Pytago cho bất kỳ tam giác nào hay chỉ tam giác vuông?

3. Các nhóm báo cáo các câu hỏi ưu tiên mà nhóm mình đã chọn và lý do mà nhóm đã chọn những câu hỏi đó làm câu hỏi ưu tiên.

Bước 6: Thảo luận về những bước tiếp theo (tùy chọn)

Sau khi xác định thứ tự ưu tiên cho các câu hỏi, học sinh thảo luận về cách sử dụng chúng. QFocus ban đầu đã thúc đẩy học sinh suy nghĩ sâu hơn về nội dung, cách sử dụng của định lý Pytago. Họ tích hợp các câu hỏi vào phương pháp học và quyết định cách tìm câu trả lời thông qua sách giáo trình, tài liệu trực tuyến hoặc nguồn tư duy. Quá trình này giúp học sinh thấy rõ mục tiêu học tập và tầm quan trọng của việc đặt câu hỏi.

Bước 7: Chiêm nghiệm

1. Giáo viên đưa ra các câu hỏi chiêm nghiệm để tìm về khối lượng và các loại kiến thức mà tiến trình QFT đã mang lại cho học sinh. Ví dụ:
   – Em đã học được gì?

   – Em đã học được gì về Định lý Pytago mà chúng ta đang tìm hiểu?

   – Em đã học Định lý Pytago bằng cách nào?

2. Giáo viên cho các nhóm nhỏ thảo luận các câu hỏi và ghi lại các ghi chú để báo cáo trước lớp. Các nhóm có thể chọn một diễn giả đại diện để báo cáo hoặc chia sẻ suy nghĩ của mình một cách tự nguyện.

   Bước này giúp học sinh tự đánh giá quá trình học và nhận ra giá trị của việc sử dụng kỹ thuật đặt câu hỏi để tăng cường kiến thức và ứng dụng vào cuộc sống hàng ngày.

3.2. Đề xuất sư phạm nhằm thúc đẩy và phát triển kỹ năng Khởi tạo Câu hỏi của học sinh trong quá trình học tập môn Toán

Trong quá trình học môn Toán, việc thúc đẩy và phát triển kỹ năng Khởi tạo Câu hỏi của học sinh là rất quan trọng. Để làm điều này, có một số biện pháp và hoạt động có thể được áp dụng. Đầu tiên, cần khuyến khích học sinh đặt câu hỏi bằng cách tạo môi trường

học tập thoải mái và an toàn. Học sinh nên được khích lệ đặt câu hỏi mà không bị coi là ngớ ngẩn và nhận được sự đáp ứng tích cực từ giáo viên và bạn bè.

Cung cấp cho học sinh các câu hỏi mẫu và bài toán thú vị cũng là một cách khác để khơi gợi sự tò mò và khởi tạo câu hỏi từ phía học sinh. Bằng việc liên kết các câu hỏi với các khái niệm toán học, vấn đề thực tế hoặc các bài toán thú vị, học sinh sẽ được khuyến khích suy nghĩ sáng tạo và khám phá.

Tổ chức các hoạt động thảo luận và trao đổi ý kiến trong lớp cũng rất quan trọng. Thông qua việc thảo luận và trao đổi ý kiến, học sinh có cơ hội chia sẻ câu hỏi và ý kiến của mình với nhau. Điều này khuyến khích sự tư duy phản biện và khởi tạo câu hỏi từ phía học sinh.

Sử dụng công cụ và tài liệu hỗ trợ: như bài giảng, sách giáo trình, phần mềm toán học, trò chơi hoặc ứng dụng điện thoại thông minh, cũng là một cách hiệu quả để khuyến khích học sinh đặt câu hỏi và tìm hiểu sâu về các khái niệm toán học. Cuối cùng, việc cung cấp phản hồi tích cực và động viên học sinh trong việc đặt câu hỏi là rất quan trọng. Động viên học sinh bằng cách công nhận câu hỏi tốt và khích lệ họ nâng cao kỹ năng đặt câu hỏi.

Tổ chức các hoạt động và sử dụng các biện pháp trên sẽ giúp học sinh phát triển kỹ năng Khởi tạo Câu hỏi trong môn Toán. Điều này sẽ giúp họ trở thành những người học tự động, sáng tạo và có khả năng khám phá sâu hơn trong môn Toán cũng như trong các lĩnh vực khác nhau.

KẾT LUẬN

Bài báo giới thiệu Kỹ thuật Khởi tạo Câu hỏi (QFT) trong quá trình học. Kỹ thuật này giúp học sinh học cách đặt câu hỏi, khuyến khích sự tò mò và tự học. Qua các bước như chọn QFocus, tạo câu hỏi, phân loại và ưu tiên chúng, học sinh phát triển kỹ năng tư duy sâu hơn và tự quản lý học tập. Kỹ thuật QFT không chỉ là công cụ giảng dạy mà còn giúp học sinh phát triển kỹ năng sống quan trọng.

Lời cảm ơn

Nhóm tác giả chân thành cảm ơn ThS. Dương Thị Hà, người đã trực tiếp và tận tình hướng dẫn nhóm tác giả trong quá trình viết bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. Rothstein, L. Santana (Dịch giả: Hoàng Anh Đức), *Chỉ thay đổi một điều: Hướng dẫn học sinh cách đặt những câu hỏi cho chính mình*, NXB Trẻ, 2023.

[2] https://rightquestion.org/about/history/

[3] https://rightquestion.org/resources/tai-nguyen-qft-bang-tieng-viet-qft\-resources-invietnamese/

[4] https://www.pace.edu.vn/tin-kho-tri-thuc/ky-nang-dat-cau-hoi

TẠP CHÍ TOÁN HỌC & SINH VIÊN
Chuyên mục "Tin tức vừa qua"

TRAO GIẢI CUỘC THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ TRAO QUÀ TẾT CHO SINH VIÊN VƯỢT KHÓ NĂM HỌC 2023 - 2024

Sáng ngày 26/01/2024 tại văn phòng khoa Toán đã diễn ra chương trình tuyên dương và khen thưởng sinh viên đạt giải cuộc thi Olympic Toán và trao quà tết cho sinh viên vượt khó năm học 2023 - 2024.

Kết quả, cuộc thi Olympic Toán sinh viên cấp trường có tổng 26 giải. Trong đó thành tích cao nhất có thể kể tới: 2 giải Nhất, 3 giải Nhì, 8 giải Ba và 13 giải Khuyến khích ở các bộ môn Giải tích, Đại số và Toán sơ cấp. Đây là bước tiến lớn, giúp sinh viên khoa Toán tiến gần hơn tới cuộc thi "Olympic Toán sinh viên toàn quốc 2024".

Một số hình ảnh tại chương trình

Với mục đích lan toả tinh thần đoàn kết, sự quan tâm đến các bạn sinh viên vượt khó của khoa Toán, tại chương trình, Ban chủ nhiệm khoa Toán đã động viên, chia sẻ và trao tặng các phần quà cho sinh viên vượt khó nhân dịp đón Xuân Giáp Thìn 2024.

Trước đó, ngày 02/12/2023 tại giảng đường ABCD đã diễn ra khai mạc cuộc thi Olympic toán học sinh viên cấp trường. Đây là hoạt động diễn ra thường niên, nhằm tạo cơ hội cho các bạn sinh viên muốn thử sức với niềm đam mê toán học. Qua hoạt động, khoa Toán sẽ chọn ra các bạn có kết quả cao để thành lập đội tuyển tham gia cuộc thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc.

Một số hình ảnh tại cuộc thi Olympic cấp trường

THÁNG THANH NIÊN 2024 - TUỔI TRẺ TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2 XUNG KÍCH, TÌNH NGUYỆN VÌ CUỘC SỐNG CỘNG ĐỒNG

Toàn cảnh Ra quân tháng thanh niên

Sáng ngày 02/3/2024, Đoàn Thanh niên - Hội sinh viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 tổ chức Lễ ra quân Tháng Thanh niên năm 2024 với chủ đề "Tuổi trẻ Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 xung kích, tình nguyện vì cuộc sống cộng đồng".

Đ/c Vũ Hồng Phúc - Bí thư Đoàn trường phát biểu tại buổi Ra quân

Phát biểu tại chương trình, đồng chí Vũ Hồng Phúc - Bí thư Đoàn trường nhấn mạnh: "Các hoạt động Tháng Thanh niên năm 2024 phải phù hợp kế hoạch chung của Đoàn cấp trên và của Nhà trường, được tổ chức hiệu quả, đáp ứng nguyện vọng của số đông thanh niên, sinh viên; phù hợp với thực tiễn, tăng cường các hoạt động do cấp liên chi đoàn, câu lạc bộ phụ trách. Đổi mới phương thức tổ chức các hoạt động, phát huy hiệu quả vai trò của Đoàn; Tạo sự quan tâm của các cấp và toàn xã hội đối với công tác bồi dưỡng, đào tạo và giáo dục thế hệ trẻ. Đoàn Thanh niên - Hội Sinh viên trường tin tưởng các cấp bộ đoàn hội trong Trường sẽ đoàn kết, nhất trí, xây dựng, tổ chức được nhiều hoạt động hấp dẫn, hiệu quả cho sinh viên trong trường và lan tỏa hình ảnh, giá trị Nhà trường tới cộng đồng và xã hội".

TẠP CHÍ TOÁN HỌC & SINH VIÊN
Chuyên mục "Tin tức vừa qua"

CHUNG KHẢO HỘI THI "ROAD TO MATHEMATICS"

Ngày 20/03/2024 tại Hội trường 14-8, đã diễn ra chung khảo hội thi "Road to Mathematics". Tham dự chương trình có các thầy cô trong khoa Toán, BCH ĐTN-HSV trường và các bạn sinh viên khoa Toán.

Đại biểu chụp ảnh lưu niệm

Nhằm chào mừng Tháng Thanh niên 2024 và hướng tới kỉ niệm 93 năm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, khoa Toán tổ chức: "Cuộc thi ROAD TO MATHEMATICS" với mục đích mang đến sân chơi bổ ích, lành mạnh để sinh viên khoa Toán thể hiện tài năng, trí tuệ, sự sáng tạo của mình.

Ban tổ chức cuộc thi đã nhận được đơn đăng kí từ 16 đội đến từ các chi đoàn trong khoa. Sau các vòng loại, Ban tổ chức cuộc thi đã chọn ra 4 đội vào vòng chung kết. Kết quả, - Đội quán quân: Đội 09 (K48 + K48TTA); Đội á quân: Đội 06 (K47G + K47ATTA); Đội hạng ba: Đội 08 (K47K + K47BTTA) và Đội 07 (K47H + K47BTTA).

Một số bức ảnh tại cuộc thi

Đây là cuộc thi giúp sinh viên trong khoa rèn luyện sự tư duy logic, xử lý tình huống trong học tập cũng như trong cuộc sống. Thể hiện sự bản lĩnh, sự tự tin, trau dồi kiến thức và mở rộng tầm nhìn về Toán học, Tiếng Anh, các kiến thức về Đoàn TNCS Hồ Chí Minh,…

KHÓA HỌC: TOÁN HỌC - MÔ HÌNH HÓA THẾ GIỚI THỰC

Ngày 11/11/2023, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 phối hợp với Viện Nghiên cứu cao cấp (NCCC) về Toán tổ chức Khóa học: Toán học - Mô hình hóa thế giới thực.

Toàn cảnh khóa học

Tham dự khóa học có: PGS, TS Lê Minh Hà - Giám đốc điều hành VIASM; PGS, TS Trần Thị Tuấn Anh - Trường Công nghệ và Thiết kế, Đại học Kinh tế Thành phố Hồ Chí Minh; TS Tạ Thị Nguyệt Nga - Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh; cùng thầy và trò trường ĐHSP Hà Nội 2.

Phát biểu tại Chương trình, TS Trịnh Đình Vinh - Phó Hiệu trưởng Trường ĐHSP Hà Nội 2 gửi lời cảm ơn đến Viện NCCC về Toán và các Báo cáo viên đã phối hợp với Nhà trường tổ chức Khóa học nhiều ý nghĩa, tạo cơ hội và truyền cảm hứng yêu Toán học cho viên chức và sinh viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, góp phần phát triển Toán học.

Một số hình ảnh tại khóa học

Khóa học "Toán học - Mô hình hóa thế giới thực" đã góp phần trang bị cho học viên, đặc biệt là học viên sau đại học, sinh viên sư phạm những kiến thức mới, đặc biệt là những bài học, và kinh nghiệm trên thế giới về phát triển năng lực mô hình hoá và kỹ năng mô hình hoá (modelling), một trong 5 năng lực đặc thù của Toán học trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Các ví dụ về vận dụng và sử dụng công cụ Toán học trong việc giảng dạy các môn học STEM đã được giới thiệu và minh hoạ tại Khoá học.